EUCLIDES

vakblad voor de wiskundeleraar

juni 07
nr 8
jaargang 82

Als ik zeg wiskunde, wat zegt u dan?

Perspectieven met NLT

Waar cijfers weer getallen zijn…

Studiedag/ jaarvergadering 2007

NKBW





Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

COLOFON

juni 07

nr 8

jaargang 82

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 8 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394

Redactie

Bram van Asch
Klaske Blom
Marja Bos, hoofdredacteur
Rob Bosch
Hans Daale
Gert de Kleuver, voorzitter
Dick Klingens, eindredacteur
Wim Laaper, secretaris
Joke Verbeek

Inzendingen bijdragen

Artikelen/mededelingen naar de hoofdredacteur: Marja Bos, Koematen 8, 7754 NV Wachtum
E-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst liefst digitaal in Word aanleveren; op papier in drievoud. Illustraties, foto's en formules separaat op papier aanleveren: genummerd, scherp contrast.
Zie voor nadere aanwijzingen: www.nvvw.nl/euclricht.html

Realisatie

Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices
De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v.
Veenendaal, www.de-kleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Website: www.nvvw.nl

Voorzitter

Marian Kollenveld,
Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk
Tel. (070) 390 63 78
E-mail: m.kollenveld@nvvw.nl

Secretaris

Wim Kuipers,
Waalstraat 8, 8052 AE Hattem
Tel. (038) 444 70 17
E-mail: w.kuipers@nvvw.nl

Ledenadministratie

Elly van Bemmel-Hendriks,
De Schalm 19, 8251 LB Dronten
Tel. (0321) 31 25 43
E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Lidmaatschap

Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt voor
- leden: € 50,00
- leden, maar dan zonder Euclides: € 35,00
- studentleden: € 26,50
- gepensioneerden: € 35,00
- leden van de VVWL: € 35,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50
Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.
Niet-leden: € 55,00
Instituten en scholen: € 140,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 17,50
Betaling per acceptgiro.

Advertenties en bijsluiters

De Kleuver bedrijfscommunicatie:
t.a.v. Ada Valkenburg
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal
Tel. (0318) 555 075
E-mail: a.valkenburg@de-kleuver.nl

Kort vooraf [Marja Bos]

Breaking news

Stop de persen! Op de valreep onze felicitaties voor wiskundelerares en NVvW-lid Carmen van den Boom. Op 1 juni jl. werd zij namelijk verkozen tot 'Docent 2007, gekozen door leerlingen'. Zo'n 25000 leerlingen nomineerden ruim 1200 docenten voor deze verkiezing, georganiseerd door de NCRV en de website *www.scholieren.com*. Winnares Carmen, van het Bonaventura College in Leiden, werd ondersteund door een campagneteam uit klas 2AB/HB dat onder meer een speciale website bouwde, *www.carmengaathetmaken.nl*. Carmen liet op haar beurt zien hoe haar passie voor chocola kan leiden tot passie voor wiskunde bij haar leerlingen. Na de zomer komen we hier in Euclides uitgebreid op terug!

Vakantietijd, opruimingstijd

Maar eerst… Vakantie!
Vakantie?!? Nee, éérst papierstapels schiften, rommel opruimen, digitale mappen en e-mails ordenen, het bureau leeg zien te krijgen…
In steeds meer instellingen wordt een *clean desk policy* gehanteerd: het opgeruimde bureau. Je komt aan dat beleid al helemáál niet meer onderuit als er sprake is van flexibele werkplekken, elke keer een ander plekkie 'met niks van jezelf'. Ook iets voor u, zo'n clean desk policy? Ik ben blij dat ik er niet toe veroordeeld ben, al zou dat héél goed voor me zijn en zou ik me er thuis en op school bovendien een stuk geliefder mee maken. Mijn bureaus, thuis en op school, 'tonen' namelijk niet bepaald fraai; de computer is voortdurend omringd met allerlei (wanneer?!) nader-uit-te-zoeken stapels. Een leeg bureau – een opgeruimd hoofd, zeggen ze. Opruimcompetenties schijnen bovendien gerelateerd te zijn aan intelligentie. Met dat gegeven moet ik dan maar leren leven.

Vakantietijd, artikelschrijftijd

Jammer, natuurlijk, om die lange zomervakantie zomaar nutteloos voorbij te laten gaan! Gelukkig kan ik u een fijne suggestie doen: wat dacht u van het schrijven van een aardig artikeltje voor Euclides? Dat zou bijvoorbeeld kunnen gaan over uw ervaringen met statistiek en kansrekening, het thema van de special die we in februari hopen uit te brengen. Over de wiskunde van het *toeval*, toch heel wat anders dan de 'zekerheden' die we normaliter uitventen in onze lessen en colleges over de wis-en-zeker-kunde.
Vraagt 'toeval' nog om een speciale didactiek? En bent u tevreden met de huidige *inhoud* van de vakonderdelen statistiek en kansrekening binnen de diverse opleidingen? In de vernieuwingscommissie cTWO wordt daar ook volop over nagedacht en gediscussieerd, getuige artikelen van Anne van Streun en Carel van de Giessen in het jongste maart- en aprilnummer van Euclides. Als u op dit gebied iets interessants wilt delen met 'de collega's in het land', zend uw conceptbijdrage voor deze special dan vóór 1 september in. Het adres is *redactie-euclides@nvvw.nl*.
Maar bijdragen over andere onderwerpen zijn natuurlijk ook welkom. En wees eerlijk, de zomervakantie leent zich er toch uitstekend toe om dat lang-uitgestelde artikel eindelijk eens te schrijven?! Wees genereus, hou uw ideeën niet voor uzelf, maar deel ze met collega's. Euclides is er voor gemáákt!

Na de vakantie

Met ingang van het nieuwe cursusjaar krijgen velen van ons te maken met de vernieuwde Tweede fase, inclusief het bijbehorende ABCD van de wiskunde. Er valt wat mij betreft veel aan te merken op de aanvankelijke beslissingen op het ministerie en op het politieke proces dat uiteindelijk dit (voorlopige) resultaat heeft opgeleverd. Zo blijf ik het leidende principe van de 'organiseerbaarheid' op de scholen een uiterst merkwaardig uitgangspunt vinden – inhoud kwam pas op de tweede plaats. Maar goed, laten we er wat moois van maken met elkaar, laten we – volgens alle cliché's – knelpunten maar als kansen beschouwen, en onze leerlingen het best mogelijke onderwijs bieden. Ongetwijfeld lopen we komend jaar nog tegen organisatorische problemen aan (want die nagestreefde grotere organiseerbaarheid is niet onmiddellijk een feit; denk maar aan de ongetwijfeld kleine wiskunde C- en D-klasjes). Het lijkt me daarom nuttig de her en der bedachte oplossingen voor die knelpunten te inventariseren en te publiceren. Opnieuw verwijs ik u graag naar het e-mailadres van de redactie: *redactie-euclides@nvvw.nl*.
Maar eerst wens ik alle lezers een plezierige en ontspannen vakantie!

Inhoud

'Als ik zeg wiskunde, wat zegt u dan?'

AFLEVERING 4: IN GESPREK MET VAKGENOTEN OVER WISKUNDE IN HET VOORTGEZET ONDERWIJS

[Hans Daale, Joke Verbeek, Klaske Blom]



Frank: gedreven en enthousiast



Carl: bereid om 10 keer iets uit te leggen

In de afgelopen maanden hebben we als groepje redactieleden voorbijgangers overvallen met vragen over wiskunde. Ook hebben we mensen in meer gestructureerde interviews laten ingaan op hun ervaringen met wiskundeonderwijs en hun visie laten geven op het praktische gebruik ervan. De resultaten van deze acties heeft u in de drie vorige nummers kunnen aantreffen.
Maar we wilden ook nog graag de stemming peilen onder degenen waarvoor dit blad bedoeld is. Daarom laten we aan het slot van deze mini-serie de wiskundeleraren zelf aan het woord. Daarvoor toog onze groep naar Amersfoort om rond de tafel van Klaske Blom een vijftal van haar collega's van het Meridiaan College te confronteren met onze vragen. Alleen al voor het feit dat ze hun mening op die tafel wilden leggen, zijn we dankbaar – zeker nu wiskunde meer dan ooit in de belangstelling staat als een soort 'ultieme bewaarder van de boom der kennis'.
De volgende wiskundedocenten van het Meridiaan College te Amersfoort namen deel aan het gesprek:
Frank van den Heuvel, 49 jaar, havo/vwo
Carl Martens, 52 jaar, vmbo-t
Rosemarie Oortman, 53 jaar, vwo
Peter Tilman, 41 jaar, vmbo-t, havo/vwo
Jos Vreeburg, 59 jaar, vmbo-k/lwoo

Wat zegt u?

Uiteraard gaan we van start met de vraag die we aan iedereen de afgelopen maanden hebben voorgelegd: 'Als wij zeggen "wiskunde", wat zegt u dan?'
'Leuk. Simpelweg een leuk vak', in een soort eenstemmig koor van de gesprekspartners. Maar Carl plaatst er meteen, ter ontnuchterende nuancering, een kanttekening bij: 'Maar het is toch ook maar gewoon een vak, net als alle andere.' De rest beaamt dit, maar na enig heen en weer gepraat blijft het gemeenschappelijke standpunt dat ze in ieder geval met een boeiend vak bezig zijn. Jos: 'Leraar zijn is dan wel mijn vak, maar ik heb toch heel specifiek voor wiskunde gekozen aangezien dat het beroep juist leuk maakt.'
Daarover is dus geen discussie meer nodig. Maar wat zeggen jullie vervolgens tegen ouders die op open dagen vragen wat wiskunde is? Met andere woorden: hoe kijk je als docent tegen de huidige wiskunde aan?
Carl: 'Nou, los van het feit dat ik altijd bij open dagen mag plaatsnemen op de parkeerplaats om alles logistiek in goede banen te leiden, vind ik dat het vak wiskunde als zodanig niet is veranderd. We brengen de zaken alleen anders, en dat is iets dat ouders ook moeten begrijpen en uitgelegd dienen te krijgen. Maar als ik eerlijk ben, dan kun je wel stellen dat het niveau van het wiskundeonderwijs op het vmbo is gedaald.' Jos: 'We verpakken de wiskunde veel meer in toepassingen en allerlei praktijksituaties. Maar het lastige voor leerlingen is dat het, zoals Carl ook zegt, nog gewoon wiskunde is die je moet beheersen. En het vervelende is dat ze het rekenen allang verleerd zijn.' Peter: 'Ik ga met Carl mee. We hebben toch wat zaken moeten laten vallen, vergeleken met zo'n vijftien jaar geleden.'
Frank: 'Ik ben niet zo somber. Het draait allemaal meer om vaardigheden, maar het vak is daarmee leuker geworden om te geven. Dat is winst. Maar door alle wiskunde te gieten in context-opgaven leren de leerlingen de tussenstappen niet meer te herkennen en ze weten dus aan het



Rosemarie: brengt structuur aan



Peter: leerlinggericht



Jos: streng, maar niet meer zo streng als in het begin

eind niet welke zaken ertoe deden. Maar natuurlijk zijn leerlingen helemaal niet dommer dan vroeger…' Rosemarie is het met hem eens: 'We brengen het anders, met verhaaltjes en zonder de nodige structuren. Het is nu mijn vierde jaar dat ik voor de klas sta, als herintreder, maar ik ben van mening dat de analyse van een probleem met wat daarbij hoort, belangrijk is en moet blijven.'
Frank komt terug op het punt van de ouderavonden: 'Natuurlijk moeten we opboksen tegen het imago van ons vak. Hier en daar zitten dus die trauma's bij ouders, ook bekend uit de vorige verhalen in Euclides. De leerlingen zelf zijn vaak best goed in wiskunde, maar het thuisfront wil soms niet meewerken. Ook dat is een aspect van ons vak.'

Nut

Dan kom je eigenlijk vanzelf bij de leerlingen uit. Hoe probeer je je leerlingen duidelijk te maken wat wiskunde is en wat het nut ervan is?
Jos: 'Ik vind het belangrijk om aanvullende toepassingen te geven, gewoon uit de dagelijkse praktijk. Laat ze maar eens stoeien met zaken als rente.'
'Ik vind het moeilijk om nu het nut aan te tonen van allerlei zaken die ze aangeboden krijgen', geeft Carl aan. 'Het klinkt misschien ouderwets maar dan moet je wel eens zeggen dat pas later duidelijk zal worden wat je eraan hebt. Laat ze eerst maar gewoon netjes zijn in hun formuleringen, dus bezig zijn met het logische van de wiskunde.' Frank is het daar duidelijk mee eens: 'Het gaat vaak gewoon om het netjes redeneren, omdat zoiets altijd nuttig is voor je latere werk en het leven zelf: ordenen, toepassen, concepten en modellen maken. Dus we moeten niet toestaan dat de leerling maar wat opschrijft en dan roept van "je snapt wel wat ik bedoel" of zoiets.'
Carl haakt hierop in: 'Het is voor mij onbegrijpelijk dat je als tweede corrector nog steeds merkt dat er docenten zijn die de schrijfwijze sin ½ = 30° gewoon maar goedkeuren met zo'n kreet als verdediging in mijn richting… Lekkere discussies zijn dat.'
Peter: 'Ik denk dat de context bij veel opgaven er met de haren wordt bijgesleept. Dat kan verwarrend werken en dan bereik je juist niet wat je wilt: het aantonen van een zeker nut van dat onderdeel.' 'En het is al vaker gezegd', vult Carl aan, 'allochtone leerlingen missen vaak een bepaalde taalvaardigheid en dan schiet je je doel voorbij. Je weet domweg niet waaraan het ligt als zo'n leerling ergens niet uitkomt.'
Rosemarie: 'Laten we niet vergeten dat veel leerlingen een bepaalde vorm van dyslexie hebben.' Frank: 'Het is ook maar de vraag of het verpakken in een context bijdraagt aan het aanleren van wiskunde en dan specifiek het modelmatige ervan. Je moet ze toch leren om de strategie te vinden om te komen tot een oplossing, en die strategie te begrijpen, omdat je dan zo'n strategie ook in andere situaties kunt gebruiken.
Ik heb twee jaar geleden in 5-vwo een experiment gedaan bij verschillende vakken, door leerlingen eenzelfde wiskundig model te laten gebruiken, dus door ze met een identieke aanpak te laten werken. Het gekke was dat ze zich niet realiseerden dat ze eigenlijk met eenzelfde procedure bezig waren. Toen ik vertelde van mijn experiment werden hun ogen wel geopend…'

Wiskunde en het latere beroep

Wat anders: kun je zeggen dat wiskunde nodig is voor een beroep? En zo ja, welke kennis en vaardigheden zijn voor jouw leerlingen van belang?
Carl: 'Je hebt natuurlijk wiskunde nodig in je latere leven, maar hoe, dat is toch sterk afhankelijk van het beroep waarvoor je studeert. De vraag is of je dan zover moet gaan dat je ook in je lessen moet gaan differentiëren met het oog daarop. Dat is erg moeilijk, bovendien weet je niet altijd wat ze uiteindelijk echt gaan doen. Zo is mijn beste leerlinge kapster geworden, en dat vind ik dan persoonlijk toch zonde van de wiskundige capaciteiten die ze heeft.'
Frank: 'Misschien kan ze die talenten gebruiken bij het maken van kubusvormige of piramideachtige kapsels? Je weet toch maar nooit… Maar los daarvan: ik denk dat je bij wiskunde moet leren dat je niet bang hoeft te zijn om problemen aan te pakken. We kunnen leerlingen een bepaalde bagage meegeven waarmee ze kunnen proberen om eerst na te denken als ze ergens in vastlopen.'
Jos: 'Voor leerlingen in het vmbo moeten we ook zoiets zien te bereiken. Ze moeten weten hoe ze zaken op een rijtje kunnen zetten, om vervolgens te kiezen voor een gestructureerde aanpak. Dus ordenen.'
Carl: 'Overigens geldt dat niet alleen voor

ons vak. Ik zie dat men bij natuurkunde al eerder met formules werkt dan bij wiskunde, dus dat men daar meer modelmatig bezig is. Maar ook bij de talen en economie moet zonder meer structuur worden aangebracht.' Frank: 'Klopt, maar de kracht van wiskunde is juist dat we daarbij vakoverstijgend kunnen werken.' Rosemarie: 'Toch vind ik dat we in het voortgezet onderwijs moeten zorgen voor een goede wiskundige basis, voor een vervolgopleiding zoals werktuigbouwkunde. Men leert daar juist voor een vak of beroep, wij leggen daarvoor een basis.'

Type docent

Een belangrijk punt is natuurlijk de situatie als docent in de huidige context van het onderwijs. Daarom willen we wat meer inzoomen op de wijze van lesgeven en de huidige ervaringen met het voor de klas staan met de jeugd vandaag de dag. Daarmee zou je een soort spiegelbeeld moeten gaan krijgen van alle herinneringen die in de vorige afleveringen naar voren kwamen, als een reflectie op het onderwijs van toen. In dat kader vragen we iedereen om even aan zelfreflectie te doen: 'Wat voor type docent ben je eigenlijk? Hoe zien de leerlingen jou, als docent wiskunde?'

Peter: 'Ik denk dat ik vooral gestructureerd overkom, maar wel duidelijk leerlinggericht'. Jos: 'Ze zullen me zeker zien als streng. In het begin kwam ik, geloof ik, niet erg aardig over, maar dan leer je in de loop van de jaren wel veel van de reacties.' 'Ook streng, misschien wel irritant streng,' reageert Carl. 'Ik ben aan de ene kant gewoon autoritair, maar de leerlingen weten aan de andere kant dat ik best bereid ben om iets tien keer uit te leggen. Maar, ze dienen me maar gewoon te accepteren zoals ik ben.' Rosemarie haakt aan bij eerdere uitspraken: 'Ik probeer structuur aan te brengen als docent, en ik merk dat je daarmee veel leerlingen over hun aanvankelijke angst voor wiskunde kunt heen helpen.' Frank: 'Je hebt daarbij gewoon een heleboel enthousiasme nodig, en dat moet je uitstralen. Maar ook ik ben streng, maar wel gedreven.

Omdat er vaak wordt geklaagd over het feit dat 'over de hoofden heen' allerlei zaken in de wiskundeprogramma's worden veranderd, willen we ook graag weten 'wat er helaas niet (meer) in het curriculum zit' en wat je dus echt mist.

Carl is meteen heel duidelijk: 'Algebraïsche vaardigheden. Zoiets als met de abc-formule, dat zijn zaken die ze toch moeten hanteren'. Peter: 'Dat vind ik nou juist het voorbeeld van een trucje.' 'Je moet toch snappen wat er gebeurt, als je iets toepast,' reageert Carl, 'want neem nou de derdemachtswortel die volgens de eisen in ons programma moet worden behandeld. Als je die niet in verband kunt brengen met een derdemacht, dan komt die wortel gewoon uit de lucht vallen.'

Frank sluit zich daarbij aan: 'Zo'n abc-formule is dan wel een voorbeeld van iets abstracts, maar je kunt hem afleiden en dus begrijpen. Het zegt zonder meer iets over het niveau dat je hebt bereikt.' Peter voegt daaraan toe dat de samenhang tussen de onderdelen en over de leerjaren heen vaak ontbreekt: 'Zoiets als van die machten en wortels blijven op die manier losse onderdelen voor de leerlingen. Je moet eigenlijk meer tijd hebben om de verbanden te kunnen leggen en te laten zien dat er sprake is van een bepaalde samenhang.' Rosemarie is het daarmee eens: 'En niet alleen omdat ik bewijzen vroeger altijd zelf erg leuk vond. Je moet er je verstand bij gebruiken en dat is echt niet verkeerd.'

'Bovendien', geeft Frank aan, 'moeten we goed opletten wat het vervolgonderwijs nodig heeft. Zo zit gonio nu op het havo bij wiskunde B1 niet in het centraal examen en dan sturen we ze wellicht zonder de juiste wetenschap naar technische opleidingen in het hbo. Ze moeten toch gewoon een sinusoïde kunnen analyseren… Daarnaast probeer ik ook het vak wat breder te trekken dan alleen maar het examen. Zo roep ik dat de wortel uit -1 gewoon bestaat. Als duidelijk gemaakt is hoe dat zit, is het iets dat gewoon blijft hangen.'

Zo'n voorbeeld van 'iets dat wel kan, al zou je dat niet denken op voorhand' onthouden ze dus. Maar is wiskunde in het algemeen iets waarvan je zegt dat jouw leerlingen er iets aan hebben voor hun latere leven?

Carl: 'Nee, niks'. De anderen kijken hem enigszins verbaasd aan. 'Juist wel,' reageert Frank. 'Ik bedoel het letterlijk,' zegt Carl, 'wiskunde is een middel en geen doel.' Frank: 'Dan zijn we het eens, als het gaat om de uitwerking van wiskunde. Je komt elementen van hetgeen bij wiskunde aan de orde komt eigenlijk overal in je leven tegen, maar op zichzelf draait het niet om wiskunde als vak.'

'Dan zou ik ook ertoe neigen om 'niks' te zeggen,' stelt Peter. Jos is het daar helemaal niet mee eens: 'Met de wiskunde leren ze een hoop, ook al realiseren ze zich dat op dat moment niet. Zoals we al eerder opmerkten: het geeft ze een structuur, in het denken, in bepaalde situaties en dat is toch voortgekomen uit de wiskunde.' Rosemarie wil daarvan wel een voorbeeld geven uit de tijd dat ze nog werkzaam was als beleidsmedewerker, voordat ze als zij-instromer het onderwijs binnenkwam: 'Ik moest een probleem oplossen rond het vaststellen van aantallen kinderopvangplaatsen en op een gegeven moment zat ik ineens met twee vergelijkingen met twee onbekenden. Toch handig dat je zo'n probleem analyseert en transformeert naar zo'n wiskundig stelsel.'

Frank wijst op de normale zaken waarbij we wiskunde hanteren, ook iets om in de les te gebruiken om leerlingen te wijzen op het nut van het vak 'voor later': 'Denk maar aan de situatie als je gaat vliegen, met de trein reizen en er een ingewikkeld kaartje moet worden gekocht. Het inschatten van de overstapmogelijkheden en de tijden die beschikbaar zijn, toch allemaal zaken waarbij systematisch moet worden gerekend.' 'Of denk aan het inrichten van een tuin, thuis aan de tafel met een plattegrondje', voegt Rosemarie aan deze praktijksituatie toe. 'Nou, laatst wilde een kennis een ellipsvormige vijver in z'n tuin maken', herinnert Frank zich, 'en toen bleek de truc van vroeger met twee grote spijkers en een stuk touw toch nog steeds best handig te zijn…'

Leraarschap

Wat vind je in het algemeen van het leraarschap, en hoe zie je je eigen toekomst daarin?

Jos: 'Soms heel vervelend en frustrerend. Maar het hangt toch ook erg af van de klassen die we meekrijgen van het management.' 'Klopt', beaamt Frank, 'het is een zwaar vak maar leuk en altijd weer anders. Eigenlijk is elk jaar en elke dag onvoorspelbaar. Wat ik het frustrerende vind is dat ik wel eens zit te denken aan een situatie waarin alles zo optimaal mogelijk is, en wat je dan wel niet allemaal met die leerlingen zou kunnen bereiken…'

Carl haakt hierop in: 'In de klas, als je bezig bent, kun je wel de juiste vorm en aanpak vinden en gebruiken. Maar er is zoveel "gezeur" omheen. Zo is vooral bij mij de verhouding met de ouders in de loop der

jaren sterk veranderd. Ze menen vaak zich op het gebied van de docent te kunnen gaan bewegen om dan te gaan mee-bepalen wat er moet gebeuren, uiteraard wat hun kind betreft, als dat iets heeft gedaan dat niet mag binnen onze school.' De anderen knikken hierbij instemmend en geven aan dit soort ontwikkelingen te herkennen. Carl vervolgt: 'Het beroep is door al dat soort zaken zwaarder geworden. Ik heb evenveel lessen als vroeger, maar nu met van alles erbij. Dat wordt niet meer gecompenseerd door de routine die je in de loop der jaren opdoet.'
Rosemarie kijkt als zij-instromer nogal nuchter tegen deze ontwikkelingen aan: 'Wiskunde is op zichzelf een prima en leuk vak om te geven. Het draait allemaal om de kinderen waarmee je bezig bent.' Peter is eveneens een voorbeeld van iemand die leraar is vanwege dat soort aspecten van het vak. 'En ik zou dus nooit iets anders willen. Maar ik ben het met Carl eens dat er vooral dingen op je bordje komen te liggen die in mijn visie niets met het leraarschap te maken hebben, en dat is frustrerend.'
'Jammer genoeg is dat zo gegroeid en daardoor ben je veel tijd aan niet-lesgeven kwijt', zegt Frank.

Afrondend

Omdat we ongetwijfeld van alles niet aan de orde hebben gesteld, is er voor het vijftal nog gelegenheid voor het noemen van zaken waarvan zij vinden dat we die aan onze lezers moeten meegeven. Anders gezegd, de vrije hand om van alles te roepen… Het mag ook best een leuk voorval zijn…
De groep kijkt elkaar aan en komt tot de conclusie dat we ze eigenlijk alles wel hebben laten vertellen. Maar goed, Frank wil toch nog wel even wat kwijt: 'Ik vind dat wiskunde best een beetje mysterieus vak mag zijn en blijven. We moeten de magie van het vak en wat er allemaal achtersteekt in stand houden, dat hoort er een beetje bij. Leerlingen vinden dat eigenlijk ook wel, want je kunt een klas zeker motiveren door ze uit te dagen. Groepen leerlingen vormen de voedingsbodem voor de uitdaging van de docent.'
Carl: 'Om dan maar met iets opmerkelijks te eindigen, als aardigheidje: ik gebruik in 3-vmbo een grafische rekenmachine, met een blauwe kleur. Op een gegeven moment kwam het stroomgebruik daarvan ter sprake en toen vertelde ik dat dit apparaat veel meer stroom nodig had dan een ander dat in de bovenbouw van het vwo wordt gebruikt. Kwam een leerlinge uit de hoek met "dat het zeker kwam door de blauwe kleur". Kennelijk had zij wel van groene stroom gehoord…'

We bedanken de groep voor de openhartigheid tijdens het gesprek; ook hun collega's lezen Euclides immers. Men is van mening dat het een goed idee was om op deze manier aandacht te schenken aan ons vak, in een tijd dat er veel wordt gesproken over rekenvaardigheid, niveau, competenties en voortdurende vernieuwingen. Misschien moeten we dit maar gewoon elk jaar doen, in het laatste nummer. Voor docenten door docenten.

Over de auteurs
Hans Daale, Joke Verbeek en Klaske Blom maken deel uit van de redactie van Euclides.
E-mailadres: *redactie-euclides@nvvw.nl*

Oratie Jan van Maanen

[Marja Bos]

Op 21 maart jl. sprak Jan van Maanen zijn oratie uit bij de aanvaarding van het ambt van gewoon hoogleraar in de Didactiek van het Wiskundeonderwijs aan de Faculteit Bètawetenschappen van de Universiteit Utrecht.



De titel van zijn rede was: *De koeiennon. Hoe rekenen en wiskunde te leren, en van wie?* Van Maanen houdt daarin een pleidooi voor:

- vakdeskundige leraren, in basisonderwijs en voortgezet onderwijs;
- frequente interactie tussen leerling en leraar;
- zinvol oefenen;
- een lerarenopleiding die zich vooral richt op de vakdeskundigheid van de leraar;
- onderwijs dat meer uit ICT haalt.

De tekst van de oratie is te downloaden op *www.fi.uu.nl* of te lezen in het jongste maartnummer van de *Nieuwe Wiskrant* (nr. 26-3). Als boekje kan het voor € 5,00 (excl. verzendkosten) besteld worden via *www.fi.uu.nl/nl/winkel* (ISBN 978-90-70786-03-8; 42 pag.).

In *Euclides* 82-4 (februari 2007) verscheen een interview met Van Maanen naar aanleiding van zijn aantreden als hoogleraar-directeur van het FIsme, afdeling Wiskunde.

De redactie van Euclides feliciteert Jan van harte, en wenst hem veel succes bij zijn werkzaamheden. Dat doen we met een aanmoediging in zijn eigen woorden: 'Aan de slag voor inhoudrijk, stimulerend en dus humaan wiskundeonderwijs.'

Nationale Kennisbank Basisvaardigheden Wiskunde

[Vincent Jonker, Nataša Brouwer, Monica Wijers]

De laatste paar jaar zijn er steeds meer geluiden te horen over de slechte reken- en algebraïsche vaardigheden van leerlingen en studenten op allerlei niveaus van het onderwijs. Een van de overgangen waarbij de aansluitingsproblematiek speelt, is die van het voortgezet onderwijs (vo) naar het technisch en economisch hoger onderwijs (ho). Op 23 april 2007 kwamen ruim 70 docenten wiskunde uit vo en ho bijeen in de Jaarbeurs Utrecht om van gedachten te wisselen over deze aansluitingsproblematiek. Deze bijeenkomst was georganiseerd door het project Nationale Kennisbank Basisvaardigheden Wiskunde (NKBW) en SIGMA (Special Interest Group Mathematical Activities van SURF). In dit artikel lichten we toe wat dit voor 'clubs' zijn, en doen we verslag van deze dag.

Het project NKBW

Vanaf december 2006 werken enkele universiteiten en hogescholen samen, financieel ondersteund met gelden vanuit het Nationaal Actie Programma E-learning (SURFfoundation; zie Verwijzingen), aan de aansluitingsproblematiek op het gebied van wiskunde tussen voortgezet onderwijs en hoger onderwijs.

Het gaat daarbij met name om de aansluiting tussen havo/vwo en de vervolgopleidingen in de technische en de economische sector. Hogescholen en universiteiten hebben recentelijk meer problemen geconstateerd met het instroomniveau van studenten, met name op het gebied van algebraïsche vaardigheden. Dit blijkt uit de resultaten op instaptoetsen in het hoger onderwijs. Op diverse universiteiten en hogescholen heeft men, om dit probleem op te lossen, zogenaamde bijspijkercursussen ontwikkeld om geconstateerde 'achterstanden' bij studenten eenvoudig te kunnen wegwerken.

Het samenwerkingsverband 'Nationale Kennisbank Basisvaardigheden Wiskunde' (NKBW; zie: *www.nkbw.nl*; penvoerder is het Amstel Instituut van de Universiteit van Amsterdam; voor alle partners zie de Verwijzing onderaan dit artikel) heeft zich ten doel gesteld om landelijke initiatieven te bundelen en een 'portal' (website) op te leveren waar materialen (toetsen, oefeningen) bij elkaar worden gebracht voor docenten en studenten uit het vo en het ho. De naam 'kennisbank' voor het project is enigszins misleidend, omdat er ook duidelijk wordt ingezet op onderzoek en afstemming tussen opleidingen. De huidige looptijd van het project is één jaar. Inmiddels is bekend dat de SURFfoundation (in afstemming met VSNU en HBO-raad) een verlenging van het Nationaal Actieprogramma heeft bedongen voor de duur van drie jaar. Het kernteam van NKBW is voornemens een verlenging aan te vragen van het huidige project.

Onderzoek en dialoog

Het onderzoek van NKBW moet meer licht laten schijnen op de aard van de aansluitingsproblematiek. Op de deelnemende universiteiten en hogescholen worden daarom de resultaten verzameld van de instroom van eerstejaars (resultaten op de instaptoetsen, resultaten van de bijspijkercursussen) en wordt van de betrokken studenten ook geïnventariseerd wat hun resultaten waren voor wiskunde in het voortgezet onderwijs. Dit zal een concreet beeld opleveren van de prestaties van de leerlingen, maar ook van de eventuele verschillen in toetspraktijk tussen vo en ho. Denk bijvoorbeeld aan het geval waarbij de student in het vo goed presteert en bij aanvang in het ho slecht presteert. Dit kan duiden op verschil in aangeboden wiskunde-inhoud, in de toetsvorm, in het wel of niet gebruik maken van ondersteunende tools, etc. In het onderzoek zal daarom ook een analyse worden uitgevoerd van de toetspraktijk in het ho (met name instaptoetsen) in relatie tot de huidige eindexamens wiskunde.

Naast dit onderzoek is binnen NKBW aandacht voor de dialoog tussen vo en ho. Het is de stellige overtuiging van het NKBW-projectteam dat een dialoog tussen docenten wiskunde uit vo en ho noodzakelijk is om te werken aan de oplossing van de huidige aansluitingsproblematiek.

Studiedag; plenair

Op 23 april 2007 kwamen ruim 70 docenten wiskunde uit vo en ho bijeen in de Jaarbeurs Utrecht om van gedachten te wisselen over de aansluitingsproblematiek wiskunde vo-ho. De dag werd georganiseerd door NKBW en SIGMA (Special Interest Group Mathematics Activities van SURF). Voor een volledig verslag van deze dag (en de presentaties van de sprekers) zie de website van NKBW (*www.nkbw.nl*).

De dag was een mix van enkele plenaire lezingen en een aantal workshops (waarbij steeds een docent wiskunde vo en een docent wiskunde ho gezamenlijk de workshop verzorgden). Er werd afgesloten met een paneldiscussie.

De dagvoorzitter, Roel van Asselt (lector Saxion Hogescholen), opende de dag met een pleidooi om aansluiting niet alleen te focussen op de programma-aspecten, maar bij de overstap vo-ho ook aandacht te besteden aan de verandering in de didactiek, de nieuwe leeromgeving en aan de juiste verwachtingen van de leerlingen/studenten over studie en beroep.

De drie plenaire sprekers schetsten in hun lezingen een helder beeld van de huidige stand van (algebraïsche) basisvaardigheden in het ho en het vo.

Leendert van Gastel (Amstel Instituut,

UvA) ging onder andere in op de recente historie van 'bijspijker-cursussen' die op het ho zijn ontstaan, en de aanzetten om een dialoog op gang te helpen tussen vo en ho (onder andere door de oprichting van SIGMA bij SURF en het project NKBW). Daarbij riep hij op tot een gezamenlijke aanpak, gedragen vanuit vo en ho.
Bert Zwaneveld (Ruud de Moor Centrum, Open Universiteit) belichtte de problematiek vanuit het voortgezet onderwijs en liet in zijn lezing verschillende mogelijke oorzaken zien die ten grondslag kunnen liggen aan de minder goede aansluiting tussen vo en ho op dit moment.
Ten slotte liet Dirk Tempelaar (Universiteit Maastricht) zien wat er uit onderzoeksgegevens kan blijken bij de internationale instroom van studenten van de Universiteit Maastricht. Dit onderzoek laat zien dat het de laatste paar jaar beduidend minder goed gaat met de resultaten van Nederlandse studenten ten opzichte van hun Duitse collega-studenten. Dit is des te opmerkelijker omdat er in de Duitse situatie op de middelbare school weinig wijzigingen in het curriculum zijn opgetreden de laatste jaren, terwijl in Nederland juist veel energie is gestoken in een verbetering van de aansluiting vo-ho (door de invoering van het studiehuis e.d.)

Studiedag; workshops

De deelnemers hebben zich twee keer verdeeld over drie parallelle sessies. Het voert te ver om hier uitgebreid verslag te doen van elke workshop. Om een indruk te geven van de onderwerpen geven we hier een kort overzicht. Het ochtendprogramma bevatte drie workshops.

Case studies

Vanuit de diverse hogescholen en universiteiten en vanuit het Junior College Utrecht (JCU) worden ervaringen beschreven hoe de tekorten op het gebied van algebraïsche vaardigheden worden aangevuld. Zo constateert Aad Goddijn van het JCU dat wiskunde niet mogelijk is zonder goede basisvaardigheden, maar dat het trainen van basisvaardigheden zinloos is zonder diepgaander inzicht in de wiskunde.



Basisvaardigheden

Tijdens de tweede ochtend parallelle sessie 'Basisvaardigheden' wordt gesteld dat basisvaardigheden gebruikt moeten worden als bouwsteen van grotere activiteiten (ontwerp-, studie, presentatie- en samenwerkingsactiviteiten).

Tool use

In deze workshop wordt het woord 'tools' breed opgevat en omvat zaken als grafische rekenmachine, specifieke wiskundepakketten (zoals Mathematica), schoolwiskunde-pakketten (VU-grafiek, etc.), Office-onderdelen (Word, Excel), maar ook het schoolbord en de gewone rekenmachine. In de discussie bij deze workshop werd met name stilgestaan bij een zinvolle inzet van de grafische rekenmachine in het voortgezet onderwijs. Ondanks de goede (didactische) uitgangspunten om de rekenmachine in te zetten blijken leerlingen/studenten te vaak bij eenvoudige berekeningen direct naar het apparaat te grijpen.

In de namiddag hebben nog drie parallelle sessies plaats gevonden.

Toetspraktijken, realistische en reële toetsing

In deze workshop stelt men vragen bij de toetspraktijk van het ho in 2006. Bij de huidige eindexamens in het vo worden op dit moment nooit atomaire kennis of atomaire vaardigheden getest, maar wel de beheersing van vaardigheden in een context, waarbij een 'context' ook wiskundig kan zijn. Het nieuwe subdomein A5 'Algebraïsche vaardigheden' is geen reactie op externe kritiek, maar is uit de schoot van het vo zelf voortgekomen. In het kader van dit nieuwe subdomein zullen algebraïsche vaardigheden af en toe ook sec getoetst worden.

Intelligente feedback

In deze workshop presentaties van onderzoekers die met e-learning tools (wisweb, active math, etc.) het oplossen van wiskundeopgaven ondersteunen. Belangrijk is dan dat feedback heel direct is en rekening houdt met het oplossingsgedrag van de leerling.

Hoe komen studenten aan hun kennis?
Hier laten de presentatoren twee verschillende aanpakken zien om gebrek aan wiskundekennis te remediëren. Het gaat dan enerzijds om het regelmatig diagnostisch toetsen van wiskundekennis (in dit geval met MapleTA) om het studiegedrag te verbeteren. Anderzijds wordt een digitale vraagbaak getoond (WisFaq) waar je met wiskundevragen terecht kunt. De vragenstellers komen uit Nederland en België vanaf vo-onderbouw tot en met ho. Elke vraag wordt in principe persoonlijk door vrijwilligers, docenten wiskunde, behandeld.

Paneldiscussie
De bijeenkomst werd afgesloten met een paneldiscussie onder leiding van Roel van Asselt met als leden Bert Zwaneveld (Ruud de Moor Centrum, OU), Henk van de Kooij (FIsme, UU/CEVO), Sieb Kemme (Kemme Adviezen BV) en Jan van de Craats (UvA, OU/Resonansgroep wiskunde). Er werd gediscussieerd aan de hand van de volgende stellingen:

1. Het hoger onderwijs houdt vast aan wiskundige vaardigheden die, op de keper beschouwd, niet de set van vaardigheden is die er in de beroepspraktijk toe doet.
2. Het toelaten van digitale hulpmiddelen en formulekaarten bij het eindexamen wiskunde havo/vwo heeft tot direct gevolg dat het niveau van de basisvaardigheden tot een onacceptabel laag niveau daalt.
3. Competentiegericht onderwijs is onverenigbaar met verwerven van wiskundige vaardigheden.
4. Een goede aansluiting wiskunde vo-ho is niet alleen gebaat bij een goede afstemming van vakinhouden: ook de veranderende didactiek, de nieuwe leeromgeving en de juiste verwachtingen beïnvloeden een doorlopende leerweg.
5. Aansluitverbeteringen in alleen het vo of in alleen het ho zijn zinloos; alleen gezamenlijk herontwerp van de wiskunde-leerlijnen rendeert.
6. De nadruk op algebraïsche vaardigheden is niet zinvol. Als er al ergens tijd in gestoken moet worden is het wel in ‘problem solving’.

Met name de stellingen 1 en 6 kwamen aan bod. Daarbij viel op dat het noodzakelijk is bij dergelijke stellingen eerst de exacte duiding van de gebruikte begrippen uit te voeren (woorden als ‘beroepspraktijk’ en ‘problem solving’). Het panel, de voorzitter en de zaal waren het er wel zeer over eens dat bij de aanpak van het aansluitingsprobleem in gezamenlijkheid gewerkt moet worden. Uit de evaluatie (ingevuld door de deelnemers van deze studiedag) enkele reacties op deze discussie:

- goed geleid, goed gesprek ook met de zaal;
- evenwichtige discussie;
- jammer dat nog geen 15% van de deelnemers (van deze studiedag) uit het vo is;
- eigenlijk te kort; wel goede stellingen.

Deze discussies zijn belangrijk, en worden op diverse plekken gevoerd waar docenten vo en ho elkaar treffen (bijvoorbeeld in de context van de steunpunten wiskunde D; zie de website van cTWO).

En verder
In het najaar zal er een tweede ontmoeting tussen docenten vo en ho georganiseerd worden. De ‘portal’ (website) van NKBW zal in de zomer van 2007 operationeel worden, zodat er vanaf het nieuwe seizoen mee gewerkt kan worden. Er worden momenteel diverse afstemmingsgesprekken gevoerd met NVvW, WisFaq, Wisbase, etc. We hopen in een volgend artikel meer over het NKBW-onderzoek te kunnen vertellen.

Verwijzingen

- cTWO (2006), commissie toekomst wiskunde onderwijs, *www.ctwo.nl*
- Nationaal Actie Programma e-Learning (2006). Richt zich op verhoging van de participatiegraad in het Nederlands hoger onderwijs door de inzet van e-Learning. Een initiatief van de SURFfoundation; *www.surffoundation.nl/smartsite.dws?id=9452*
- NKBW (2006), Nationale Kennisbank Basisvaardigheden Wiskunde, *www.nkbw.nl*
  De volgende partners participeren: Fontys, Haagse Hogeschool, Hogeschool Zuyd, Open Universiteit, Rijksuniversiteit Groningen, Technische Universiteit Delft, Technische Universiteit Eindhoven, Universiteit Leiden, Universiteit Maastricht, Universiteit Twente, Universiteit Utrecht, Universiteit van Amsterdam, Vrije Universiteit.
- SIGMA (2006), Special Interest Group Mathematics Activities, *http://e-learning.surf.nl/sigma*
- Studiedag VO-HO aansluiting wiskunde, volledig verslag met presentaties op *www.fi.uu.nl/nkbw/communicatie/uitwisselings-bijeenkomsten/20070423/*
- P. Vos (2007): *Algebra-prestaties van tweedeklassers*. In: Euclides, 82(4), pp. 129-133
- Wisbase, wiskunde toetsenbank voortgezet onderwijs, *www.wisbase.nl*
- WisFaq, wiskunde vraagbaak, *www.wisfaq.nl*

Over de auteurs

Vincent Jonker, Freudenthal instituut / Universiteit Utrecht, betrokken bij NKBW als werkpakketleider communicatie, *v.jonker@fi.uu.nl*
Nataša Brouwer, Amstel instituut / Universiteit van Amsterdam, coördinator van SIGMA, mede-organisator studiedag 23 april, *nbrouwer@science.uva.nl*
Monica Wijers, Freudenthal instituut / Universiteit Utrecht, betrokken bij het onderzoek van NKBW, *m.wijers@fi.uu.nl*

Perspectieven met NLT

[Harrie Eijkelhof]



Per augustus 2007 starten circa honderdvijftig havo/vwo-scholen met het nieuwe bètavak Natuur, Leven en Technologie (NLT). Tientallen scholen, alle universiteiten met bètaopleidingen en een aantal hogescholen en kennisinstituten werken aan lesmateriaal. Wat houdt NLT in en wat biedt het? Harrie Eijkelhof, voorzitter van de Stuurgroep NLT laat zijn licht schijnen op NLT.

NLT is een profielkeuzevak voor de natuurprofielen havo en vwo dat wordt afgesloten met een schoolexamen. Het mag worden gegeven door eerstegraads docenten natuurkunde, wiskunde, scheikunde, biologie en aardrijkskunde. Het vak is modulair opgebouwd en bestaat uit een aantal domeinen, zoals voor havo 'Taal van de natuurwetenschap', 'Bedreiging en behoud van de leeromgeving', 'Opsporen en beschermen', en voor vwo 'Fundament van wetenschap en technologie', 'Stellaire informatie en processen', 'Biofysica, -chemie en –informatie' (***zie figuur 1 op pag. 299***).

Modules

Er komt een ruim aanbod van uiteenlopende modules; in 2010 zijn er naar schatting vijftig landelijk gecertificeerde modules. Havo-leerlingen volgen acht modules (320 slu), vwo-leerlingen elf (440 slu). Scholen kunnen binnen zekere grenzen kiezen welke modules ze leerlingen zullen aanbieden.
In vier golven worden de modules ontwikkeld door scholen in samenwerking met hoger onderwijs en kennisinstituten. De eerste golf modules, veertien in totaal, is inmiddels getest op een kleine dertig scholen. Het Landelijk Ontwikkelpunt NLT, de Stuurgroep NLT en externe experts beoordelen de modules op inhoud en didactiek. Met de scholen die zich hebben geregistreerd bij het Landelijk Ontwikkelpunt is afgesproken dat zij minimaal 75% van de tijd vullen met door de Stuurgroep gecertificeerde modules. De stuurgroep heeft kwaliteitscriteria geformuleerd waaraan modules moeten voldoen om in aanmerking te komen voor certificering. In mei en juni worden de modules van de eerste golf herzien, eind juni besluit de Stuurgroep welke modules gecertificeerd worden. De modules van de tweede golf worden in het najaar getest. In september start de derde ontwikkelgolf, voorjaar 2008 de vierde.

Samenwerking met universiteiten

Alle elf universiteiten met een bètafaculteit zijn betrokken bij de ontwikkeling van de landelijke NLT-modules: zes algemene universiteiten, de drie technische universiteiten, Wageningen Universiteit en de Universiteit van Maastricht. Nog nooit hebben zoveel universiteiten meegewerkt aan lesmateriaal voor scholen. Het betekent inhoudelijk een grote vernieuwingsslag. Ook instituten als KNMI, NIKHEF Amsterdam [1] en het Instituut voor Plasmafysica in Nieuwegein en zes hogescholen leveren een belangrijke bijdrage. Het hoger onderwijs en de instituten vinden het van belang dat allerlei aspecten van bètawetenschappen voor het voetlicht komen. Daar was tot op heden te weinig gelegenheid voor in het voortgezet onderwijs.
Daarnaast is er een aantal netwerken dat los van de NLT-ontwikkelgolven lesmateriaal voor NLT ontwikkelt. Zo zijn bij het Junior College van de Universiteit Utrecht tien modules in de maak. Deze worden uitgeprobeerd op de leerlingen van het Junior College, die twee dagen per week op de Universiteit Utrecht onderwijs krijgen in alle bètavakken. Het lesmateriaal zal ook getest worden op een aantal scholen en zal voor landelijke certificering worden voorgelegd aan de Stuurgroep. De Stuurgroep krijgt daarnaast spontaan lesmateriaal aangeboden van universiteiten.

Wiskunde in NLT

Een belangrijke doelstelling van NLT is de verbinding te leggen tussen de exacte vakken door actuele onderwerpen te behandelen vanuit een integrale benadering. NLT kan op school dan ook het beste worden vormgegeven door een groep docenten van verschillende bètavakken. Als docenten samenwerken ontstaat er een integratie van kennis vanuit verschillende disciplines die heel vruchtbaar is. Dat gebeurt ook volop in de wetenschap en de industrie. NLT kent voor havo en voor vwo een domein waarin heel duidelijk wiskundige modules passen: 'Taal van de wetenschap' voor havo en 'Fundament van wetenschap en technologie' voor vwo. Met wiskundige modules kun je een basis leggen voor de wiskunde die gebruikt kan worden in de andere modules. Het biedt docenten in de andere bètavakken mogelijkheden om, gebruikmakend van de wiskunde, dieper in gaan op bepaalde

Domeinen HAVO

A Vaardigheden
B Taal van de natuurwetenschap
C Bedreiging en behoud van de leefomgeving
D Zorgen en genezen
E Opsporen en beschermen
F Verbetering van de kwaliteit van leven
G Grenzen verleggen
H Communiceren en navigeren
I Gemak dient de mens

Domeinen VWO

A Vaardigheden
B Fundament van wetenschap en technologie
C Aarde en klimaat
D Stellaire informatie en processen
E Biofysica, -chemie en -informatica
F Biomedische technologie en biotechnologie
G (Duurzaam) gebruik van grondstoffen, energie en ruimte
H Materialen, proces- en productietechnologie
I Werktuigen, voertuigen en producten

figuur 1

onderwerpen. Bovendien kun je leerlingen laten zien dat de wiskunde een heel belangrijke rol speelt in de ontwikkeling van natuurwetenschap en technologie. De betrokkenen bij NLT proberen tot afstemming te komen tussen wiskunde D en NLT. Naast vertegenwoordigers van de andere bètavakken zitten in de stuurgroep twee wiskundigen: Jos Andriessen (namens de NVvW) en Henk Broer (namens cTWO). Ik ben ervan overtuigd dat wanneer je NLT samen ontwikkelt, de wiskundige component kan worden versterkt in het onderwijs in de natuurwetenschappen.

Veel in beweging

NLT is een vak dat aansluit op actuele ontwikkelingen in wetenschap en technologie, en dat ruimte biedt tot verdieping. In de samenwerking met het hoger onderwijs kunnen scholen zicht geven op ontwikkelingen buiten de school, op universiteiten, hbo, andere kennisinstellingen en bedrijfsleven. Ik hoop dat er een impuls van uit gaat voor docenten om recente ontwikkelingen te volgen op hun vakgebied en aanverwante terreinen en dat ze daar ook ruimte voor krijgen. Ik verwacht dat zich dit vervolgens vertaalt naar onderwijs dat zich steeds vernieuwt.
Er is veel in beweging. Universiteiten en hogescholen overwegen om zelf NLT-onderwijs te geven. Ik verwacht dat op den duur vanuit het hoger onderwijs een aanbod ontstaat om bepaalde modules te verzorgen voor leerlingen in de regio. In de toekomst kan een school overwegen zelf een aantal modules te geven op school en andere modules te verzorgen samen met de naburige universiteit of hogeschool. Daar kunnen leerlingen practica doen die op school niet mogelijk zijn. Het voordeel is dat leerlingen zo ook een beeld krijgen van hoe het op een universiteit of hogeschool werkt. Er zullen op die manier ook fysiek meer mogelijkheden ontstaan voor samenwerking tussen voortgezet en hoger onderwijs. De strakke grenzen tussen hoger en voortgezet onderwijs zullen diffuser worden.

In 2010 moet de Stuurgroep advies uitbrengen aan de minister over de toekomst van NLT. De invulling daarvan hangt samen met de wijze waarop de Tweede Fase zal worden ingericht, mede afhankelijk van de vraag of het eindadvies van de Profielcommissies zal worden overgenomen. NLT biedt scholen binnenkort de mogelijkheid om onderwijs aan te bieden dat tot nu toe bijna niet mogelijk was. Ik zie goede perspectieven voor interessant en aantrekkelijk bètaonderwijs waarvan leerlingen, docenten, wetenschap en bedrijfsleven de vruchten zullen plukken.
U kunt op de hoogte blijven via *www.betavak-nlt.nl*.

Noot

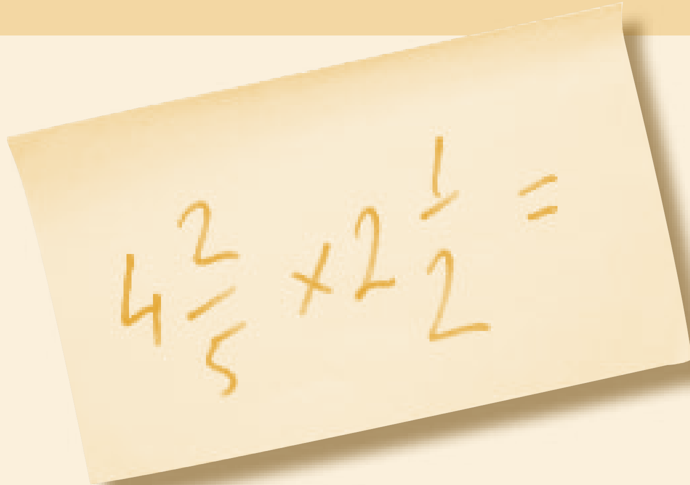
[1] NIKHEF = Nationaal Instituut voor Kernfysica en Hoge Energie Fysica te Amsterdam

Fotografie
VVB (Voermans Van Bree Fotografie), Arnhem

Over de auteur
Prof.dr. Harrie Eijkelhof is voorzitter van de Stuurgroep NLT. Hij is als hoogleraar in de didactiek van de natuurkunde verbonden aan het Freudenthal Instituut, en vice-decaan bacheloronderwijs van de Faculteit Bètawetenschappen van de Universiteit Utrecht.
E-mailadres: *h.m.c.eijkelhof@uu.nl*

Waar cijfers weer getallen zijn...

[Maike den Houting]



figuur 1 Het 'sollicitatie-sommetje'

Doe het zelf

Jaren geleden opende een nieuwe 'Doe-het-zelf'-vestiging haar deuren en pronkte er een mooie Peugeot bij de ingang. Wie een aantal vragen goed beantwoordde en de slagzin invulde, kon deze auto winnen. Die is van mij, dacht ik meteen. Met een fiets en drie heel jonge kinderen was het knap lastig om overal te komen. Ik wenste me deze auto dus toe met alle kracht die ik had. En met succes. Met dit Peugeotje rijd ik begin juni 2005 richting de Saxion Hogescholen in Deventer, op weg naar een sollicitatiegesprek. Een maand eerder had ik in de krant de advertentie zien staan voor een docent rekendidactiek op de pabo. Die baan is van mij, dacht ik meteen.

Het addertje onder het gras

Rechts van mij zit de onderwijsmanager, links twee mensen van het cluster rekenen. Een pittig sollicitatiegesprek. We praten over werkvormen, interactie, pluriformiteit, competentiegericht leren en nog veel meer. Ik kan hier duidelijk mijn visie op onderwijs kwijt. Hierover mee kunnen denken en mee mogen praten was één van de vele redenen geweest om te reageren op de advertentie. Maar naast heerlijk is het ook spannend. Ik wil de baan zo ontzettend graag!
Ineens wordt er van links een klein geel papiertje over de tafel naar me toegeschoven met de vraag hoe ik dit zou oplossen. Ik bekijk het papiertje aandachtig: $4\frac{2}{5}\times 2\frac{1}{2}$.
De getallen staren mij aan en ik de getallen (***zie figuur 1***) Ik slik even. Komen ze met breuken aan tijdens een sollicitatiegesprek. Dat heb ik nog niet eerder meegemaakt. Rekenen kan ik natuurlijk wel, maar dat zal iedereen wel kunnen die hier komt solliciteren. Wat is het addertje onder het gras? Mijn hersenen kraken, niet om de opgave op te lossen, maar om de rekendocenten te doorgronden die me deze vraag toeschuiven. Waar willen ze heen?
De spanning neemt toe. Ik ben op een pabo. Wat doen ze hier met zo'n opgave? Vast geen $\frac{22}{5}\times\frac{5}{2}=\frac{110}{10}=11$, of de vijven tegen elkaar wegstrepen en 22 : 2 overhouden. Van rechts komt een hulpvraag: 'Wat is het ongeveer?' En daar valt het kwartje, letterlijk, want ik praat meteen over geld: Nou, het is iets meer dan tien, want vier keer twee euro vijftig is al tien euro. Een winnend antwoord. Lang leve die euro. Betekenis geven aan de opgave (hoe basaal ik dat op dit moment ook doe), dát is belangrijk.

De eerste les rekenen op de pabo

Het vak *Rekenen Eigen Vaardigheid* is een soort opfriscursus voor nieuwe pabo-studenten. Er komen onderwerpen aan bod als handig rekenen, schattend rekenen, cijferen, verhoudingen, breuken, procenten, kommagetallen, meten, meetkunde, grafieken en toepassingen.
Ik schrijf 43782,536 op het bord, zet een pijl onder het derde cijfer van links en vraag wat er staat. Steevast is het eerste antwoord van de nieuwe lichting studenten: 7. Het tweede antwoord is gelukkig 700. De omschakeling wordt gemaakt.
Deze eerste les besteed ik altijd veel tijd aan het handig rekenen. Daar komen allerlei eigenschappen van bewerkingen aan bod.
Ik start met de opgave $(3\frac{1}{3}\times 17)+(28\times 3\frac{1}{3})$ die ze met handig rekenen moeten oplossen. Er wordt flink gemopperd, bij elkaar gekeken en gecijferd in plaats van handig gerekend. Maar niemand van de 40 studenten komt er uit. Wat opvalt is, dat iedereen blind begonnen is met eerst uitrekenen wat tussen haakjes staat. Zo hebben ze het immers geleerd.
Ik laat ze na een hele poos stoppen met deze ellende. Slechts twee studenten hebben op dat moment een juist antwoord gevonden, maar wel volgens een heel ingewikkelde procedure. Ik vraag de studenten om eens goed te kijken naar de getallen die daar staan, zónder meteen te willen rekenen. O ja, hoor ik hier en daar. Ik vraag door. Een studente vertelt dat dit hetzelfde is als $45\times 3\frac{1}{3}$. Want, zo redeneert ze, je mag 17 en $3\frac{1}{3}$ omkeren. Voor sommige medestudenten gaat ze hier te snel. Ze vragen zich af waarom ze 17 en 28 bij elkaar optelt en dat niet doet met die $3\frac{1}{3}$. Wanneer ik vraag om het aan elkaar uit te leggen, merk ik dat hun dat niet lukt. Ze grijpen niet terug naar een context of naar een model om het elkaar te verduidelijken en blijven steken in redenaties als: 'zo heb ik het geleerd op de middelbare school' of 'dat weet ik gewoon'.
Er komt wat meer inzicht wanneer ik een uitstapje maak naar 13 briefjes van 20 euro en nog eens 17 briefjes van 20 euro oftewel $(13\times 20)+(17\times 20)$. Dat zijn samen 30 briefjes van 20 euro en helaas niet van 40



figuur 2 Tijdens mijn eerste les Reken Eigen Vaardigheid

euro. Het idee dat $(3\frac{1}{3}\times17)+(28\times3\frac{1}{3})$ gelijk is aan $45\times3\frac{1}{3}$ wordt uiteindelijk door de rest van de groep ondersteund. Maar opnieuw zitten ze vast. Hoe reken je $45\times3\frac{1}{3}$ uit? Er is nog een uitstapje nodig naar de eigenschap 'vergroten en verkleinen'. Dat doe ik dan maar met zakjes knikkers (6 × 8 = zes zakjes met acht knikkers = twee zakjes met 24 knikkers = 2 × 24 enzovoorts) of met behulp van het oppervlaktemodel. Het is erg basaal, maar onmisbaar om weer te zien wat getallen en bewerkingen voor invloed op elkaar hebben en wat hun concrete betekenissen zijn.

We keren opnieuw terug naar $45\times3\frac{1}{3}$. De studenten bedenken al snel om die $3\frac{1}{3}$ drie keer zo groot te maken. Dan wordt die 45 dus drie keer zo klein. Nu staat er 15 × 10 en iedereen is het met me eens dat dit veel eenvoudiger is dan het hopeloze gecijfer waarmee ze zelf eerst waren gestart. Er klinkt een zucht van opluchting door de groep, maar ook van verontwaardiging. Dit is totaal anders dan ze het ooit hebben geleerd. Als docent ben ik echter nog niet tevreden. Fijn dat het antwoord klopt, maar snappen ze nu écht wat ze doen met dat vergroten en verkleinen? Ik vraag daarom of iemand een verhaal bij deze breukensom kan bedenken. Dat blijkt te moeilijk. Ze proberen het met $3\frac{1}{3}$ euro, maar het klinkt ze niet mooi in de oren. Met wat hulp komen ze uiteindelijk tot het volgende.

In het magazijn staan potten verf waar $3\frac{1}{3}$ liter in zit. Ik ga roze verf maken door rood en wit te mengen. Ik koop 17 potten rode verf en 28 potten witte verf. Hoeveel liter roze verf heb ik in totaal? *Je hebt in totaal 45 potten van $3\frac{1}{3}$ liter. Wanneer je er groepjes van 3 potten van maakt, is elk groepje samen 10 liter. Je hebt 15 groepjes met 10 liter.*
Pieter verdient 17 euro per uur en zijn vriendin 28 euro per uur. Ze werken allebei $3\frac{1}{3}$ uur op zaterdagmiddag. Hoeveel geld hebben zij samen op één zaterdagmiddag verdiend? *Ze verdienen in totaal 45 euro per uur. Dus 3 × 45 = 135 euro voor 3 uur werken. En voor een derde deel van een uur verdien je een derde deel van 45 euro en dat is 15 euro.*

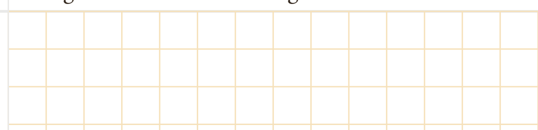
Eindelijk begint de opgave te leven, ze gaan het voor zich zien. Betekenis geven is belangrijk om te kunnen redeneren over de getallen. Je ziet hier overigens dat de keuze van de context een bepaalde strategie kan uitlokken. Bij het eerste voorbeeld maken ze er in gedachten 15 stapels van drie blikken verf van, terwijl de tweede context uitlokt om de verdeeleigenschap in te zetten: $3\times45+\frac{1}{3}\times45$.
Ik laat ze (hernieuwd) kennis maken met nog een aantal eigenschappen van getallen en bewerkingen. Vervolgens geef ik elk groepje van vier studenten een envelop met opgaven die ze samen met behulp van handig rekenen moeten aanpakken. Welkom bij *Rekenen Eigen Vaardigheid*!

Pabo-studenten kunnen niet rekenen?

Pabo-studenten moeten zich al langer verdedigen tegen de gezette gedachte dat ze niet kunnen rekenen. Dat is nog sterker geworden sinds de invoering van WISCAT-pabo, de digitale rekentoets van Cito waarmee pabo's vaststellen of instromende eerstejaars pabo-studenten voldoen aan een landelijk vastgestelde norm. Na drie mislukte pogingen moet de studie op de betreffende pabo immers worden afgebroken. Vaak leeft de hele familie mee, wanneer het toetsmoment is aangebroken. En eerlijk is eerlijk, ook mijn insteek als wiskundedocent was in eerste instantie: ik zal ze eens even gaan leren rekenen daar op de pabo, want blijkbaar kunnen ze dat nog niet. Ik was dus een vrouw met een missie, ik wilde het onderwijs aan mijn en andermans kinderen veilig stellen.
Nooit gedacht dat ik uiteindelijk tot een heel ander inzicht zou komen. Nooit gedacht dat ik voor deze missie totaal op de verkeerde plek ben gaan zitten. Als studenten niet kunnen rekenen bij de start van de pabo, dan is er daarvóór al iets heel ernstig misgegaan. Ik kan de redenering compleet anders maken door te zeggen dat studenten op de pabo pas ontdekken dat ze op de middelbare school het rekenen hebben afgeleerd. Ik kan chargeren met de uitspraak: wiskundedocenten leren kinderen het rekenen af. Ik zeg daarmee nog steeds dat pabo-studenten niet kunnen rekenen. Maar toch is er een duidelijk verschil.
Het voelt raar en vervelend. Hoe kan ik mezelf in mijn vorige beroep als wiskundedocent nou de schuld geven? Zo'n slechte docent was ik toch niet? Nu ik met een beschuldigend vingertje naar mijn vroegere ik wijs, komen er allemaal nieuwe vragen in me op:
Wat wist ik als wiskundedocent van het rekenonderwijs op de basisschool?
Wat deed ik fout met betrekking tot rekenen, en wat zou ik nu anders doen?
Waarom wist ik hier toen niets van?

Wat wist ik als wiskundedocent van het rekenonderwijs op de basisschool?

Zeven jaar heb ik als wiskundedocent gewerkt, enthousiast en bezeten van wiskundeonderwijs en didactiek. Af en toe merkte ik wel dat het rekenonderwijs op de basisschool anders was geworden. De kinderen begrepen bijvoorbeeld mijn staartdeling niet. Ik denk dat menig docent niet



weet wat er voor de ouderwetse staartdeling in de plaats is gekomen en hoe de kinderen dit noteren. Ik moest het zelf in ieder geval van mijn eersteklassers leren.
Op het St.-Ludgercollege werd een instaptoets rekenen ingevoerd. De aansluitingsproblematiek tussen basisonderwijs en voortgezet onderwijs had onze aandacht. Vooral op het gebied van breuken, procenten en metriek stelsel leek het wel alsof de leerlingen veel minder bagage hadden dan wij verwachtten. In dit kader werd een middagcursus geregeld op de pabo in Doetinchem, waar we als wiskundedocenten door Marian Steverink (pabo-docent rekenen) kort zijn ingewijd in het breukenonderwijs op de basisschool. Het was voor ieder van ons een regelrechte eye-opener. Het werd duidelijk dat we onze leerlingen sterk overschatten in hun kennis op dit domein. We bleken ook niet op de hoogte te zijn van modellen als de dubbele strook die op de basisschool gebruikt worden. Deze zouden de uitleg in onze lessen prima kunnen ondersteunen.
In onze aansluiting op de voorkennis zaten natuurlijk veel meer lacunes, maar er was geen scholingsbudget om ook andere domeinen met Marian door te nemen. Op een vrije ochtend daarom naar een groep 8 getogen, gewoon om te kijken wat het rekenonderwijs in de praktijk nu inhoudt. Van de basisschool in mijn dorp heb ik de rekenmethode geleend van groep 3 tot en met 8 om eens door te snuffelen. Zo kon ik uiteindelijk een kind in klas 1 van het voortgezet onderwijs veel beter op waarde schatten. Wiskundedocenten en zeker auteurs van middelbareschoolmethodes zouden veel beter op de hoogte moeten zijn van de bagage die een leerling meekrijgt van de basisschool. Verschillende wiskundemethodes introduceren machientjesschema's of pijlenschema's als iets totaal nieuws, terwijl kinderen op de basisschool hier in groep 3 al mee hebben gewerkt. Aan de andere kant wordt verwacht dat kinderen in het voortgezet onderwijs heel snel op een formeel niveau met breuken kunnen gaan rekenen, terwijl dit gezien hun voorkennis vaak alleen maar kan uitdraaien op het laten inslijpen van vaste rekenprocedures zonder dieper inzicht. Het is duidelijk dat leraar en leerling elkaar gewoonweg niet voldoende kennen.

Wat deed ik fout en wat zou ik nu anders doen?
Rekenen op de pabo vinden veel studenten bijzonder pittig. Zij voelen daarbij dezelfde spanning als ik tijdens dat sollicitatiegesprek met die breukensom. Op een pabo moet je ineens 'anders' rekenen dan op een middelbare school, zo wordt dat ervaren. Het vak *Rekenen Eigen Vaardigheid* lijkt voor velen niet een opfriscursus te zijn, maar een module met veel nieuwe inhoud. Op een pabo moet je kennis hebben van getallen. Je moet de bewerkingen op verschillende niveaus beheersen en er juiste contexten of modellen bij kunnen vinden. En zo hebben de studenten, zo beweren ze, het nog nooit gedaan. Dat geloof ik best. Als docent wiskunde heb ik me daar mede schuldig aan gemaakt.
Er zijn een aantal zaken die ik nu anders zou aanpakken wanneer ik weer als wiskunde-docent in de klas zou staan.
Te beginnen met meer aandacht voor de getallen, de getalrelaties en hun betekenis. Verder zou ik er voor passen om van tevoren vastgelegde strategieën op de leerlingen over te brengen. Ik had destijds de neiging om ze meteen maar de meest handige (oftewel mijn) manier aan te bieden om tot de oplossing te komen. Ik zie nu dat je daarmee het denken van de leerling stopt. Ik was heel erg productgericht bezig. De trucjes, de vaste stappenplannen en de vooraf vastgelegde oplossingsprocedures overheersten, zoals
$4\frac{2}{5} \times 2\frac{1}{2} = \frac{22}{5} \times \frac{5}{2} = \frac{110}{10} = 11$
of 'delen door een breuk is vermenigvuldigen met het omgekeerde'. Niet alleen bij rekenonderdelen is dit zo, maar ook bij *meten* zag ik leerlingen snel naar vaste procedures grijpen (van m^3 naar dm^3 is drie nullen erbij – hier greep ik overigens zelf wel naar materialen om ze meer basis te geven). Zonder het te begrijpen maar met goed toepassen van de trucjes kom je tot de oplossingen; dus waarom zou je meer moeten weten? Om ze tot diepere inzichten te brengen, om ze écht te laten leren, moet de nadruk juist liggen op het proces, steeds maar weer opnieuw. In een schoolmethode wordt zo'n proces soms helemaal niet of in een hoog tempo een keertje doorlopen. Vervolgens acht men de leerling rijp om de dieper liggende concepten te hebben opgepikt en wordt overgegaan tot het inslijpen van de trucjes met oefensommen of met soortgelijke opdrachten in net een iets ander jasje (context). Hoe geestdodend! Ik denk dat ik als wiskundedocent veel te snel bepaalde belangrijke concepten gewoon als vaststaand feit op een dienblaadje heb gepresenteerd. Jammer. In het basisonderwijs vind je verschillende zeer sterke modellen, zoals de lege getallenlijn, de dubbele strook, enzovoorts. Het zijn modellen die het denken van het kind niet sturen, maar juist volgen. Waar zijn al die modellen gebleven in het voortgezet onderwijs?
Modellen en strategieën kun je overigens niet overbrengen, kinderen moeten ze zelf construeren. Daar kun je als leerkracht heel veel in betekenen. Eerst moet het rekenwerk weer *betekenis* krijgen, dat blijkt vaak een lastige en ook vergeten stap. Het ontwikkelen van algemene denkmodellen en handige strategieën gebeurt onder andere door het houden van klassengesprekken om reflectie op eigen (informele) oplossingsstrategieën te bevorderen. Op de basisschool is dit de normale gang van zaken, op de middelbare school is er toch vaak veel meer sturing door boek en leerkracht. Goed gekozen contexten kunnen leiden tot het



Correcties Somgetallen, ...
(Van der Waall & Hendrickx)

In *Euclides* 82(6), in deel 1 van het artikel:
- pagina 235, rechter kolom, regel 14 van onder: "g = 1" moet zijn "g = ½".

In *Euclides* 82(7), in deel 2 van het artikel:
- pagina 283, midden, regels 13 en 14 van onder: de zin "Merk op dat…" moet aangevuld worden met "of van zes termen.";
- pagina 283, midden, regel 9 van onder: in plaats van "juist omdat" moet er staan "juist wanneer";
- pagina 283, midden, regel 5 van onder: "1 en 45" moet vervangen worden door "1, 15 en 45 voor *k*";
- pagina 284, midden, regel 18 van boven: "$2n \cdot m$" moet zijn "$2^n \cdot m$".

ontdekken van (andere) strategieën en mooie getalrelaties. Ook kunnen ze bij een leerling de ontwikkeling van een bepaald (denk)model uitlokken. Hier ligt wat mij betreft nog een heel belangrijke taak voor auteurs van schoolmethodes.

Waarom wist ik hier toen niets van?

Een belangrijke vraag. Ik heb er lang over nagedacht. In het curriculum van de lerarenopleiding wiskunde zat voor mij geen module 'rekenen/wiskunde op de basisschool'. Dat is achteraf gezien een groot gemis geweest. Er zou een gedegen vak 'basisschoolwiskunde' moeten zijn, of het zou geïntegreerd in de verschillende vakken moeten terugkomen. Misschien is dit wel zo op andere hogescholen en inmiddels ook bij de opleiding waar ik mijn bevoegdheid heb gehaald. Ik hoop het van harte. Want zonder zo'n vak blijft er een kloof bestaan tussen basisschool en voortgezet onderwijs.
In dat voortgezet onderwijs speelt daarnaast ook dat er voor de docent weinig ruimte is om zichzelf verder te ontwikkelen of te bekwamen. Het moet liefst allemaal in je eigen tijd gebeuren. Er zijn zoveel dingen die je aandacht nodig hebben, dat het gewoon toeval was dat ik me richtte op het basisonderwijs. Het had ook iets heel anders kunnen zijn. En zelfs met al die aandacht wist en begreep ik er toch nog veel te weinig van.

Tot slot

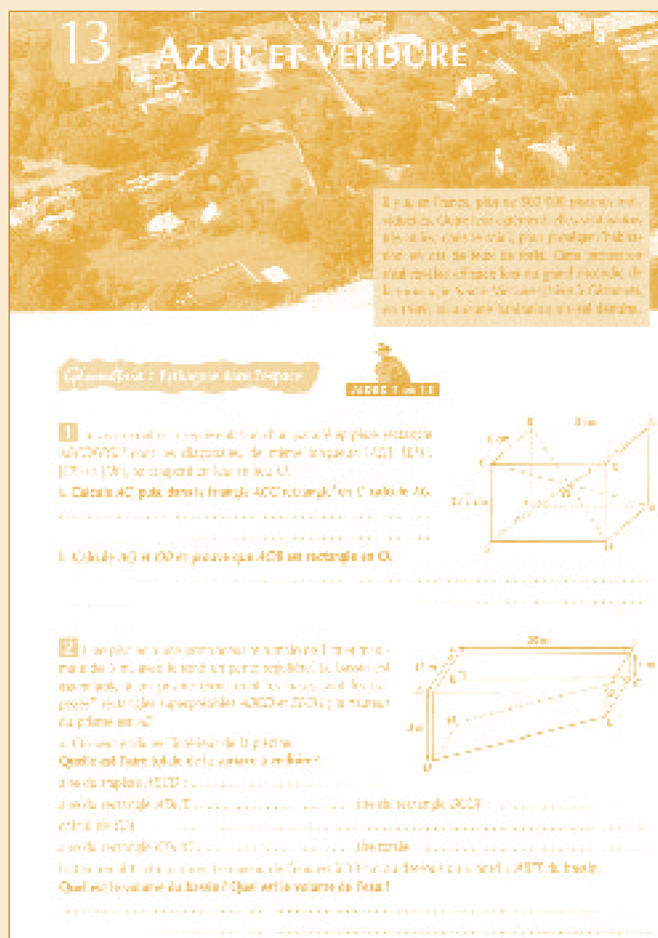
Er zijn vast meer wiskundedocenten die, net als ik, het handig rekenen moeten terugvinden en integreren in hun lessen, die moeten leren hun cijfers weer als getallen te gaan zien, die samen met de leerlingen aandacht moeten geven aan betekenisvol rekenen en die de leerlingen wat minder het eigen denken moeten ontnemen. Daarnaast is meer kennis nodig van de modellen die kinderen op de basisschool hebben uitgevonden, zodat daar op kan worden aangesloten. Meer aandacht van docent en methode voor het proces in plaats van het product is wenselijk. Dan kunnen onze toekomstige pabo-studenten straks gewoon bij de start van hun opleiding weer rekenen. Tijdens hun opleiding op de pabo leren ze hoe ze kinderen professioneel kunnen begeleiden bij hun ontdekkingstocht door de prachtige en uitdagende wereld die we wiskunde noemen. Daarbij is het niet wenselijk dat de leerkracht zelf zich vastklampt aan die ene rekenregel of die ene strategie die hij zelf beheerst of het liefst gebruikt. Of dat hij de kinderen direct vertelt 'hoe het moet'. Een 'doe-het-zelf'-pakket met een stap-voor-stap handleiding zorgt er misschien voor dat een apparaat uiteindelijk in elkaar kan worden gezet, maar het is voor de bouwer niet meer terug te vinden hoe en waarom het uiteindelijk werkt. Een zelf uitgevonden apparaat geeft de bouwer veel meer inzicht over de werking.
We moeten kinderen niet met een trukendoos leren rekenen, maar leren denken in modellen, structuren, getalrelaties en vooral betekenis.

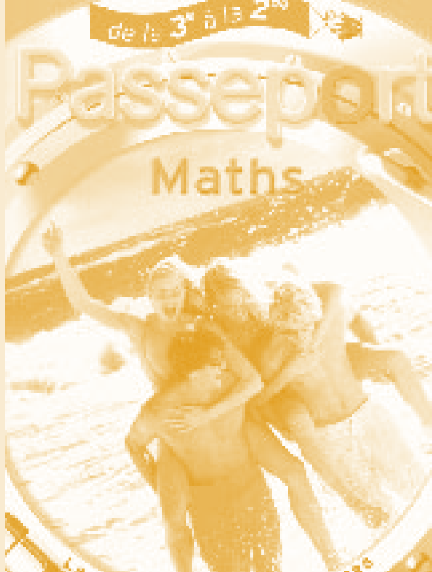
Literatuurverwijzingen

- C.T. Fosnot, M.L.A.M. Dolk (2001): *Young mathematicians at work / Constructing Multiplication and Division*. Portsmouth (NH, USA): Heinemann; pp. 73-89.
- K.P.E. Gravemeijer: *Didactisch gebruik van de lege getallenlijn - een persoonlijk perspectief*. In: Panama-Post, tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs, 21(2); pp. 11-23.

Over de auteur

Maike den Houting is sinds augustus 2005 docent vakdidactiek rekenen/wiskunde op de pabo in Deventer (Saxion Hogescholen). Daarvoor was zij wiskundedocent, onder ander op het St.-Ludgercollege in Doetinchem. Een aantal jaren was ze auteur van de methode Netwerk. Op dit moment is ze als auteur betrokken bij de ontwikkeling van de nieuwe Wageningse Methode.
E-mailadres: *m.i.j.denhouting@saxion.nl*





Vakantie en ook wiskunde

[Gert de Kleuver]

Er zijn twee zaken die mijn aandacht vragen zodra de zomervakantie nadert. Als eerste is dat de vakantiecursus in Eindhoven of Amsterdam, tegen het eind van de zomervakantie. Als tweede ben ik altijd benieuwd of er ook dit jaar weer wat leuke wiskundige dingen te verkrijgen zijn in het vakantieland waar we als gezin naar toe gaan.

Vakantiecursus

Allereerst wil ik echt iedereen aanbevelen om dit jaar naar de vakantiecursus te komen [1]. Het is altijd inspirerend om rondom een thema bezig te zijn met wiskunde.
De vakantiecursus wordt jaarlijks georganiseerd door het Centrum voor Wiskunde en Informatica (CWI) in Amsterdam, in samenwerking met de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Vorig jaar was het thema *Actuele wiskunde*. Dat programma werd mede mogelijk gemaakt door de inbreng van prof. dr. J.M. Aarts. Hij heeft prof. J. van de Craats opgevolgd als voorzitter van de programmacommissie.
Een compliment aan de commissie voor hun gevarieerde programma. Zo kwamen de volgende onderwerpen aan de orde: Tsunami's, Zuinig omgaan met energiebronnen, Zonnezeilen, Wiskunde van GIS (geografische informatiesystemen), Beveiliging van e-mail, Modern sparen, Roosteroptimalisatie bij de spoorwegen, Het ABC-vermoeden. U ziet, afwisseling genoeg. Enkele van deze lezingen werden afgelopen jaar gepubliceerd in *Nieuw Archief voor Wiskunde*.
Ieder jaar wordt ook een mooie en uitgebreide syllabus uitgegeven. Ik kan u aanraden deze aan te schaffen als u niet in de gelegenheid geweest bent naar Amsterdam of Eindhoven te gaan.

Het thema voor dit jaar is *Wiskunde in beweging*. Op de website (zie [1]) staat hierover het volgende vermeld: 'Dit jaar is het onderwerp bijzonder relevant voor de schoolpraktijk. In augustus 2007 gaat wiskunde D van start in de vierde klas van havo en vwo. In dit vak – dat verdiepend en verbredend is – is er ook vrijheid om onderwerpen of modules te kiezen. De vakantiecursus 2007 laat mogelijke invullingen zien. Zoals alle jaren is de cursus voor alle wiskundedocenten – ook die bij het hbo – en belangstellenden interessant.'

Vakantieland Frankrijk en wiskunde

En dan nu het tweede onderdeel van dit artikeltje.
Vorig jaar was ik met mijn gezin in Frankrijk en daar viel het me op dat in grote warenhuizen grote stellages stonden met allerlei oefenboekjes, voor leerlingen van verschillende leeftijden. De stellages stonden echt niet achteraf. Nee, je viel er bijna over als je de winkel binnen liep.
De oefenboekjes van uitgeverij Hachette waren speciale vakantie-uitgaven voor schoolvakken als wiskunde, Frans, Engels. De wiskundeboekjes waren te koop in zeven verschillende moeilijkheidsgraden. Ik heb een wiskundeboekje gekocht voor het één na hoogste niveau. Het boekje bevat oefenstof, korte uitleg, toetsen, antwoordenlijsten met uitwerkingen en handige geheugensteuntjes achter in het boekje.
De achttien verschillende hoofdstukken in mijn boekje behandelen onder andere vectormeetkunde, goniometrie, het oplossen van stelsels van twee vergelijkingen, en Pythagoras. Elk hoofdstukje bestaat uit vijf opgaven die eenvoudig starten en moeilijker worden bij opgave 5. Opgaven die een redenering vragen, maar ook een hoekberekening met sinus, cosinus of tangens. Bij de hoekberekening wordt ook uitgelegd hoe de leerlingen het juiste antwoord op het venster van hun rekenmachine krijgen.
Het geheel zag er kleurrijk en niet saai uit. Dat neemt niet weg dat er heel wat geoefend kan worden. Als illustratie heb ik een opgave bijgevoegd (**zie pag. 303**).
Een echte aanrader zo'n boekje.

Noot

[1] De vakantiecursus in Eindhoven vindt dit jaar plaats op 24 en 25 augustus, die in Amsterdam op 31 augustus en 1 september. Het cursusgeld is 75 euro. Meer informatie is te vinden op *www.cwi.nl/events/2007/VC2007/*

Over de auteur

Gert de Kleuver is afdelingsleider op het Ichthus College te Veenendaal. Hij is ook voorzitter van de redactie van Euclides.
E-mailadres: *g.de.kleuver@nvvw.nl*

Strookgroepen en behangpatronen

[Jeanine Daems]

Plaatjes als de regelmatige vlakvullingen van Escher zien er mooi uit. Hoe komt dat? Als je dat aan mensen vraagt is het antwoord vaak: 'Het patroon herhaalt zichzelf' of: 'Ze zijn symmetrisch.' Iedereen heeft wel een intuïtief idee van wat symmetrie is. Maar in de wiskunde kunnen we symmetrie heel precies beschrijven.

Dit artikel is gebaseerd op een voordracht die Jeanine Daems gaf op het Bruno Ernst symposium, dat op 30 maart 2007 plaatsvond op de Universiteit Leiden, ter ere van Bruno Ernst en alles wat hij gedaan heeft voor wetenschapspopularisatie.

Symmetrie als afbeelding

Laten we eens kijken naar ***figuur 1***, een plaatje van een vlinder. Waarom noemen we zo'n vlinder symmetrisch? Omdat je hem kunt spiegelen in de verticale lijn die door het midden van de vlinder loopt en hij er dan hetzelfde uit blijft zien. Symmetrie in een figuur heeft dus te maken met een *afbeelding*, bijvoorbeeld zo'n spiegeling, die je op een figuur kunt toepassen zonder dat de figuur verandert.
Om te begrijpen wat een symmetrie is, is het handig om het begrip *isometrie* in te voeren. Een isometrie is een afbeelding die elk punt van het vlak naar een punt in het vlak stuurt, zodanig dat afstanden onveranderd blijven. Voorbeelden van isometrieën zijn spiegelingen, rotaties en translaties (verschuivingen). Als je spiegelt, bijvoorbeeld, en je bekijkt twee punten die 2 cm uit elkaar liggen, dan liggen die na het spiegelen nog steeds 2 cm uit elkaar. Ze liggen waarschijnlijk allebei op een andere plek dan eerst, maar de afstand tussen de twee punten blijft hetzelfde. Hetzelfde geldt voor een rotatie of een translatie.

Een *symmetrie* van een figuur is een isometrie die de figuur weer op zichzelf afbeeldt. Als we opnieuw naar de vlinder kijken, dan is het duidelijk dat spiegelen in de verticale as door het midden van de vlinder een symmetrie is, maar spiegelen in een horizontale as niet. Dat is wel een isometrie, maar die beeldt de vlinder niet weer op zichzelf af: dan staat de vlinder opeens op zijn kop.

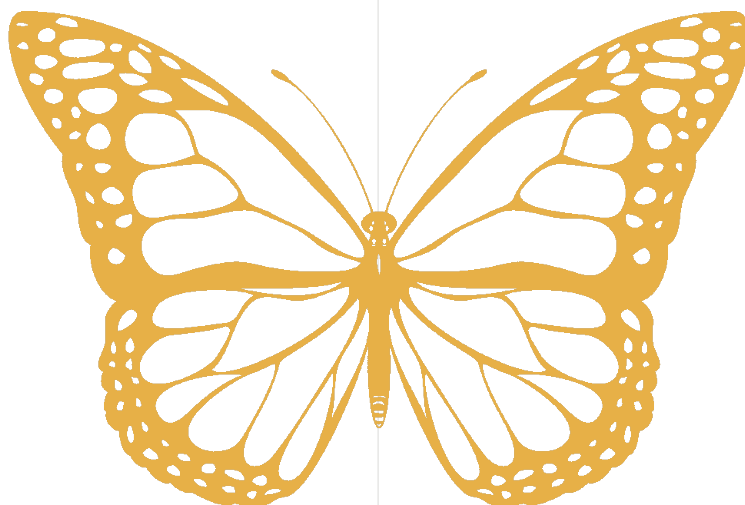
De vlinder heeft buiten de spiegeling in de verticale as nog een symmetrie: de afbeelding die elk punt weer naar zichzelf stuurt. Het is duidelijk dat afstanden onveranderd blijven (want elk punt komt terecht op de plek waar het eerst ook lag) en dat de vlinder er na die afbeelding hetzelfde uitziet (want er is niets veranderd). Deze afbeelding heet ook wel de *identiteit* of *triviale afbeelding*.

Als voorbeeld bekijken we de gelijkzijdige driehoek; ***zie figuur 2***. Welke isometrieën kunnen we op deze figuur toepassen zodat hij er hetzelfde uit blijft zien? Weer hebben we de spiegeling in de verticale as, maar ook spiegelen in de twee andere lijnen die van een hoekpunt naar het midden van de overstaande zijde lopen, verandert de driehoek niet. Bovendien kun je de driehoek roteren om zijn middelpunt om hoeken van 120 en 240 graden.

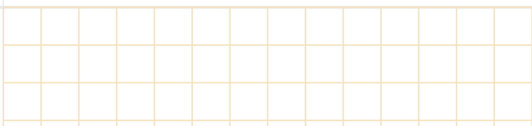
We hebben natuurlijk ook nog de afbeelding die de driehoek over 360 graden roteert. Die afbeelding beeldt elk punt van de driehoek precies af op zichzelf, dus roteren over 360 graden levert de identiteit op. We spreken af dat we twee afbeeldingen dezelfde afbeelding noemen als ze met alle punten in het vlak hetzelfde doen. Dus roteren over 365 graden is dezelfde afbeelding als roteren over 5 of 725 graden, of als over 355 graden roteren, maar dan de andere kant op.

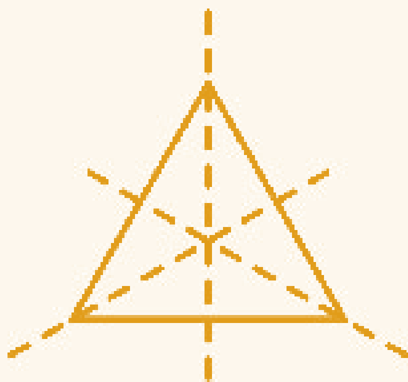
Symmetriegroepen

We zien dat de regelmatige driehoek zes symmetrieën heeft: drie spiegelingen, twee rotaties en de identiteit. De vlinder heeft twee symmetrieën: een spiegeling en de identiteit. We noemen de verzameling van alle symmetrieën van een figuur de *symmetriegroep* van die figuur. De symmetriegroep van de regelmatige driehoek bevat dus zes elementen en die van de vlinder twee. Intuïtief gezien kunnen we dus zeggen dat een figuur meer symmetrisch is naarmate de symmetriegroep meer elementen bevat; in ieder geval gaat dat op als er maar eindig veel symmetrieën zijn.



figuur 1

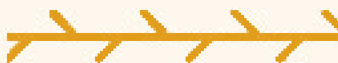




figuur 2



figuur 3



figuur 4

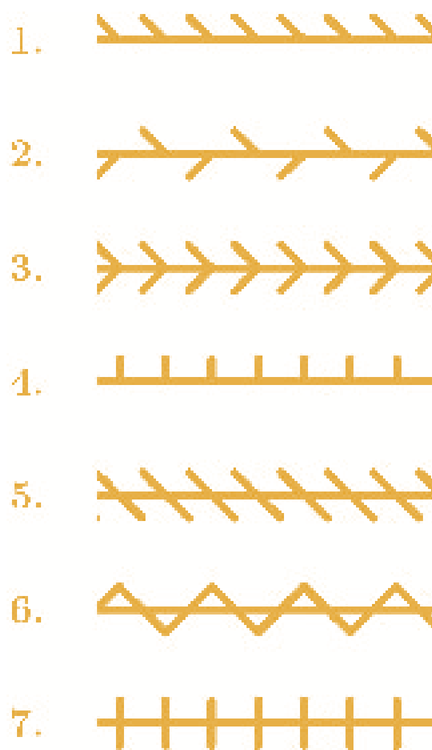
Er zijn ook figuren met oneindig veel symmetrieën, denk bijvoorbeeld aan een cirkel. Elke rotatie om het middelpunt is een symmetrie, en elke spiegeling in een lijn door het middelpunt ook. Er zijn oneindig veel reële getallen tussen 0 en 360 graden, dus de cirkel heeft een oneindig grote symmetriegroep.

Een ander voorbeeld van een figuur met een oneindig grote symmetriegroep staat in ***figuur 3***, als we aannemen dat hij oneindig ver doorloopt naar rechts en naar links.
We hebben nu translatiesymmetrieën: als we de hele figuur zo verschuiven dat elk streepje één streepje naar rechts schuift, ziet hij er weer hetzelfde uit. De translatie over één streepje naar rechts is dus een symmetrie, de translatie over één streepje naar links natuurlijk ook, en de translatie over 37 streepjes naar rechts of links eveneens. Voor elk geheel getal n is de translatie over n streepjes naar links of rechts een symmetrie van deze figuur. Dat levert oneindig veel translaties op. De symmetriegroep van deze figuur bevat dus de identiteit en oneindig veel translaties naar links en naar rechts.
Merk op dat een begrensde figuur nooit translatiesymmetrieën heeft: als je een begrensde figuur een stukje opschuift, ligt er altijd een stukje van de opgeschoven figuur buiten de oorspronkelijke figuur, dus dan zijn ze niet hetzelfde.
Een andere figuur met translatiesymmetrieën is ***figuur 4***. Behalve translatiesymmetrieën heeft deze figuur nog een nieuw soort symmetrie. Als je de figuur spiegelt in de horizontale as, dan ziet hij er anders uit, maar als je hem dan nog een stukje opschuift krijgen we wel dezelfde figuur als waar we mee begonnen. Het na elkaar uitvoeren van een spiegeling en een translatie heet een *glijspiegeling*.

Samenstellen van symmetrieën
Als je een symmetrie toepast op een figuur, dan ziet de figuur er na afloop hetzelfde uit. Dan kunnen we natuurlijk weer opnieuw een symmetrie toepassen. Dit na elkaar toepassen van symmetrieën noemen we het *samenstellen* van symmetrieën, en het resultaat is weer een nieuwe symmetrie. Als we symmetrie S uitvoeren na symmetrie T, dan schrijven we dat op als $S \circ T$.
We kijken weer naar de symmetriegroep van de regelmatige driehoek. Als we de rotatie om 120 graden samenstellen met zichzelf, dan krijgen we de rotatie om 240 graden. Als we een spiegeling samenstellen met zichzelf, dan krijgen we de identiteit. En als we de rotatie om 120 graden samenstellen met een van de spiegelingen, dan krijgen we als resultaat een van de twee andere spiegelingen.
Het samenstellen van een willekeurige symmetrie met de identiteit levert natuurlijk altijd de symmetrie op waarmee je begon.
Als je een translatie over 2 cm samenstelt met een translatie over 3 cm, dezelfde kant op, dan krijg je een translatie over 5 cm.

Inversen
Zij S een symmetrie in de symmetriegroep van een bepaalde figuur. Het blijkt altijd zo te zijn dat er een symmetrie T in diezelfde symmetriegroep zit, zodanig dat S samengesteld met T de identiteit oplevert. We noemen T de *inverse* van S.
Een spiegeling heeft bijvoorbeeld altijd zichzelf als inverse, want als je een spiegeling twee keer uitvoert krijg je als resultaat de identiteit. Roteren over 120 graden heeft de rotatie over 240 graden als inverse. Een translatie over 1 cm naar rechts heeft de translatie over 1 cm naar links als inverse. De inverse van de identiteit is natuurlijk de identiteit zelf.

Groepen
In zeker opzicht lijkt een symmetriegroep met de bewerking 'samenstellen' erg op de verzameling van gehele getallen met de bewerking 'optellen'.
Beide verzamelingen hebben een zogenoemd *eenheidselement*: in het geval van een symmetriegroep is dat de identiteit, in het geval van optelling is dat het getal 0. Als je een symmetrie A samenstelt met de identiteit, krijg je als resultaat weer A. Als je een getal a optelt bij 0, komt er altijd weer a uit.
Een andere overeenkomst is het bestaan van een inverse. We zagen al dat voor elke symmetrie S een symmetrie T bestaat, zodat S met T samenstellen het eenheidselement (de identiteit) oplevert. En voor elk geheel getal a heb je het gehele getal $-a$, dat opgeteld met a weer het eenheidselement 0 oplevert.
Tenslotte geldt er nog in beide gevallen dat het niet uitmaakt 'hoe de haakjes staan': voor symmetrieën S, T en U geldt dat $(S \circ T) \circ U = S \circ (T \circ U)$, en voor getallen a, b en c weten we dat $(a + b) + c = a + (b + c)$.
Deze drie eigenschappen zijn precies de voorwaarden waaraan een verzameling met een bewerking moet voldoen om een *groep* te zijn. In de wiskunde is het begrip groep heel belangrijk. Symmetriegroepen



figuur 5

zijn natuurlijk voorbeelden van groepen, net zoals gehele getallen met optelling. De gehele getallen met vermenigvuldiging vormen geen groep, want dan is 1 het eenheidselement, maar het getal 2 heeft bijvoorbeeld geen inverse: $\frac{1}{2}$ is geen geheel getal. De breuken zonder 0 met vermenigvuldiging vormen wel een groep.

Maar waarom is het handig om te weten dat een bepaalde verzameling met een bewerking een groep vormt? Over groepen zijn in de loop der tijd een heleboel stellingen bewezen. Zodra je weet dat de verzameling met bewerking die jij interessant vindt een groep vormt, staat meteen allerlei extra informatie tot je beschikking over de structuur van die verzameling. Voor algebraïci is het begrip *groep* dusdanig fundamenteel en vertrouwd, dat het prettig is om dingen in groepentheoretische termen te kunnen beschrijven. Dan begrijpen ze meteen veel beter hoe die dingen eruit zien. Bovendien zijn groepen op zich interessante objecten om te bekijken, en symmetriegroepen zijn daar mooie, toegankelijke voorbeelden van.

Strookgroepen

De *strookgroepen* vormen een interessant soort van symmetriegroepen. Een strookgroep is de symmetriegroep van een patroon op een strook dat een translatiesymmetrie heeft zodanig dat er een kleinste translatie-afstand is.
De eerder besproken patronen ***uit figuur 3 en 4*** hebben een strookgroep als symmetriegroep. Ze hebben namelijk translatiesymmetrieën en er is een kleinste *translatie-afstand*: je kunt niet over een willekeurig klein stukje verschuiven, want dan komt de figuur niet op zichzelf terecht.
Merk op dat de symmetriegroep van een rechte lijn geen strookgroep is: een rechte lijn heeft geen kleinste translatie-afstand.
Patronen die er verschillend uitzien kunnen dezelfde symmetriegroep hebben. Er blijken maar zeven verschillende strookgroepen te zijn. Dat zijn precies de zeven symmetriegroepen van patronen **1** tot en met **7** van ***figuur 5***.
Wanneer hebben twee patronen, zeg *A* en *B*, nu eigenlijk dezelfde strookgroep? Natuurlijk moeten ze dan allebei een strookgroep als symmetriegroep hebben. Als patroon *B* bovendien zó te schalen en te verschuiven is dat de symmetriegroep van het resulterende patroon *B'* precies dezelfde isometrieën bevat als die van *A*, dan hebben de patronen *A* en *B* dezelfde strookgroep.
Stel dat je van een bepaald strookpatroon, bijvoorbeeld een mooie rand in een Islamitisch mozaïek, wilt weten welke strookgroep daar bij hoort, dan kun je proberen het patroon zo te schalen en verschuiven tot het dezelfde symmetriegroep heeft als een van de zeven afgebeelde patronen. Maar je kunt ook het schema in ***figuur 6*** gebruiken, waaruit meteen ook blijkt wat de essentiële eigenschappen van de zeven strookgroepen zijn.
Laten we dit eens doen voor het strookpatroon uit ***figuur 7***, afkomstig van een moskee in Iran. Afgebeeld is natuurlijk maar een begrensd stukje, maar het patroon moet oneindig ver naar rechts en links doorgedacht worden.
Bevat de symmetriegroep een rotatie over 180 graden? Ja, want we kunnen het patroon roteren over 180 graden om het middelpunt van zo'n ruitje, of om het middelpunt van zo'n breder stukje, en dan komt het patroon precies op zichzelf terecht.
Bevat hij een horizontale spiegeling? Nee.
Bevat hij een verticale spiegeling? Nee, ook niet. We zien dus dat ons Iraanse strookje dezelfde symmetriegroep heeft als patroon **5**, ook al ziet het er op het eerste gezicht heel anders uit.

Behangpatronen

We hebben tot nu toe gekeken naar patronen op een strook. Typisch aan die patronen is dat ze translatiesymmetrieën hebben in één richting (hierbij noemen we een richting en zijn tegengestelde hetzelfde). We kunnen natuurlijk ook kijken naar patronen die translatiesymmetrieën in twee onafhankelijke richtingen hebben.

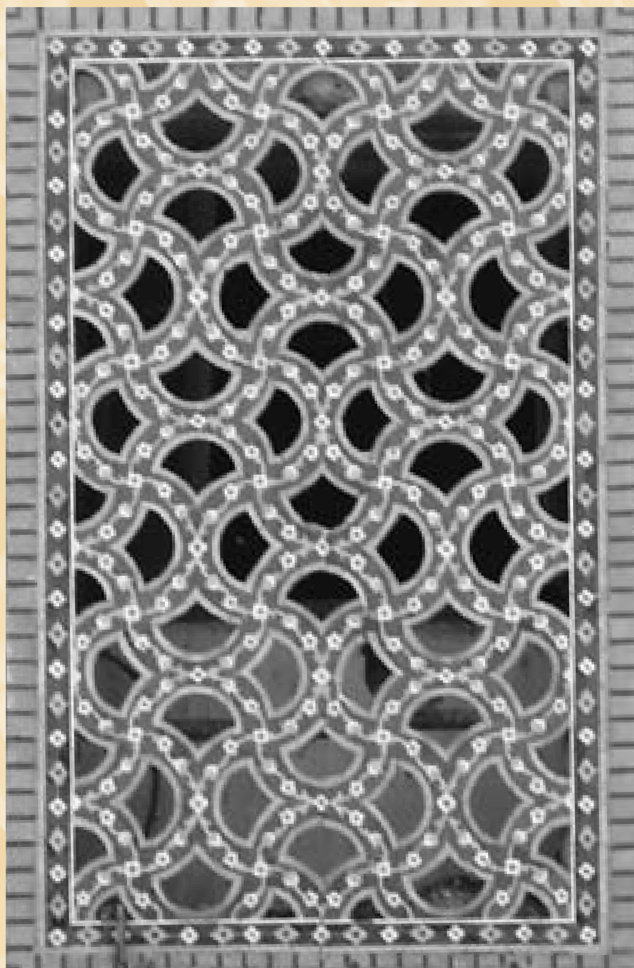
Bevat de symmetriegroep een rotatie over 180°?

- Ja. Bevat hij een horizontale spiegeling?
  - Ja. **7**
  - Nee. Bevat hij een verticale spiegeling?
    - Ja. **6**
    - Nee. **5**
- Nee. Bevat hij een horizontale spiegeling?
  - Ja. **3**
  - Nee. Bevat hij een glijspiegeling?
    - Ja. **2**
    - Nee. Bevat hij een verticale spiegeling?
      - Ja. **4**
      - Nee. **1**

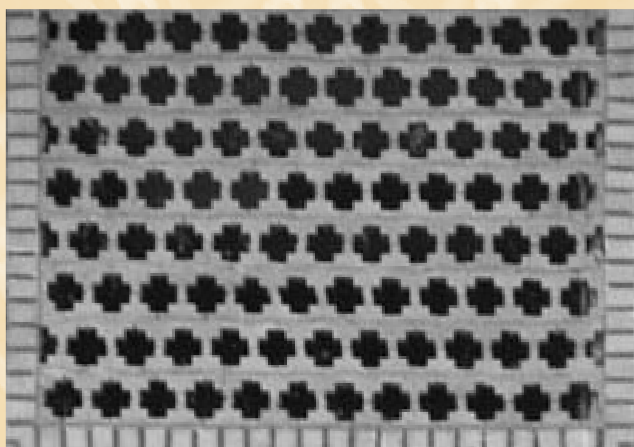
figuur 6



figuur 7



figuur 8



figuur 9

Een *behanggroep* is de symmetriegroep van een vlakke figuur die translaties in twee onafhankelijke richtingen bevat en die een kleinste translatie-afstand heeft. Voorbeelden van patronen met een behanggroep als symmetriegroep zijn een oneindig voortgezet schaakbord, een oneindig voortgezet baksteenpatroon en veel regelmatige vlakvullingen van Escher. Het Iraanse strookpatroon dat we al gezien hebben, bevindt zich rondom twee behangpatronen; ***zie figuur 8*** en ***figuur 9***.
We zagen al dat er maar zeven verschillende strookgroepen zijn. Ook het aantal behanggroepen is beperkt: daarvan zijn er 17.

Hogere dimensies

Het begrip behanggroep kan op de voor de hand liggende manier gegeneraliseerd worden naar meer dan twee dimensies. De groepen die je dan krijgt, worden *kristallografische groepen* genoemd. In 1890 lukte het twee wiskundigen, Schoenflies en Fedorov, tamelijk onafhankelijk van elkaar om het aantal kristallografische groepen in drie dimensies te bepalen. Dat zijn er 230.

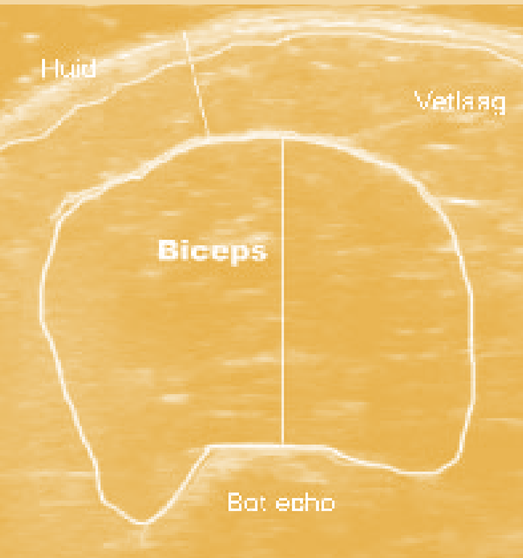
In 1900 gaf Hilbert zijn beroemde lezing op het International Congress of Mathematicians in Parijs. In die voordracht noemde hij tien problemen die volgens hem de grote vragen in de wiskunde waren van dat moment. In de gepubliceerde versie breidde hij dat aantal uit tot 23. Een deel van probleem 18 was de vraag: zijn er voor *alle* dimensies maar eindig veel kristallografische groepen? Het antwoord op die vraag is ja, en dat werd in 1910 bewezen door Bieberbach. Inmiddels is het aantal kristallografische groepen bepaald tot en met dimensie 6.

Over de auteur

Jeanine Daems werkt als aio aan de Universiteit Leiden. Ze houdt zich bezig met de geschiedenis van de wiskundige kristallografie. Samen met haar collega Ionica Smeets heeft ze een weblog over wiskunde (*www.wiskundemeisjes.nl*).
E-mailadres: *jdaems@math.leidenuniv.nl*

Patiënten in getallen: echte wiskunde in het ziekenhuis

[Natasha Maurits]



figuur 1 Voorbeeld van spierechografie: dwarsdoorsnede van de bovenarm

Wat is nu echte wiskunde? Is dat zuivere wiskunde of toegepaste wiskunde, of misschien wel allebei? Hier zal ik u laten zien wat medische praktijkvragen kunnen zijn, hoe deze opgelost kunnen worden en waarom dat echte wiskunde betreft. Kunnen we uit dit alles gevolgen trekken voor optimaal wiskundeonderwijs?

Een wiskundige in het ziekenhuis?

In 1989 deed ik eindexamen vwo en begon ik aan een studie wiskunde, met het idee dat dit een goede basisstudie zou zijn. Dat was terugkijkend niet zo gek bedacht; ik studeerde af op luchtstroming rond vliegtuigvleugels in 1994 en promoveerde op het modelleren van polymeermengsels (verven, plastics, shampoos e.d.) in 1998. Nadat ik kort een eigen bedrijf had op het gebied van mijn promotieonderzoek, begon ik in 1999 aan mijn baan als biomedisch informaticus op de afdeling Klinische Neurofysiologie van het toenmalige Academisch Ziekenhuis Groningen. In de loop van de tijd werd de onderzoekscomponent van mijn werk steeds groter, wat vorig jaar resulteerde in een aanstelling als adjunct-hoogleraar.

De afdeling Klinische Neurofysiologie maakt deel uit van de afdeling Neurologie en onderzoekt patiënten met aandoeningen van hersenen, zenuwen of spieren. Hiervoor heeft de afdeling een heel arsenaal aan meettechnieken in huis: van het redelijk bekende electro-encefalogram (EEG, meten van elektrische hersenactiviteit met behulp van elektroden) tot het wat minder bekende ultrageluid om de stroming in de halsvaten te meten en in beeld te brengen. Daarnaast beschikken we over technieken waarmee we elektrische spieractiviteit kunnen meten (elektro-myografie), afwijkende oogbewegingen kunnen registreren (elektro-nystagmografie), de werking van zenuwbanen kunnen beoordelen (evoked potentials) of het trillen van de handen bij bijvoorbeeld de ziekte van Parkinson objectief kunnen vaststellen (polyneurografie). Al deze neurofysiologische meettechnieken zijn manieren om neurologische aandoeningen in getallen uit te drukken. Dit dient meestal om de aanvragend arts te ondersteunen in het stellen van een diagnose, maar soms ook om een prognose over het ziektebeloop te kunnen uitspreken. Daarnaast vindt op de afdeling veel wetenschappelijk onderzoek plaats.

Mijn werk bestaat uit het toepassen van wiskunde in deze ziekenhuisomgeving. Als we mijn - vaak meer fundamentele - wetenschappelijk onderzoek even negeren, dan verloopt dit werk meestal volgens een vast patroon. Het begint allemaal met de vraag van een arts (stap 1). Het is dan aan mij om deze vraag te vertalen naar een fysisch-mathematische vraagstelling (stap 2), er een geschikt fysisch-mathematische methode of model bij te zoeken (stap 3) en dit uit te werken (stap 4). Daarna vindt de terugkoppeling naar de kliniek plaats: is het gevonden resultaat inderdaad klinisch relevant; is het van waarde voor de arts (stap 5)? Wanneer dit inderdaad zo is, kan de gevonden methode ingevoerd worden (stap 6) en in een later stadium, indien nodig of gewenst, geëvalueerd worden (stap 7). Dit 7-stappen plan klinkt zo misschien wat theoretisch. Daarom zal ik hier aan de hand van drie voorbeelden illustreren hoe dit in de praktijk werkt.

Voorbeeld 1: Spierechografie

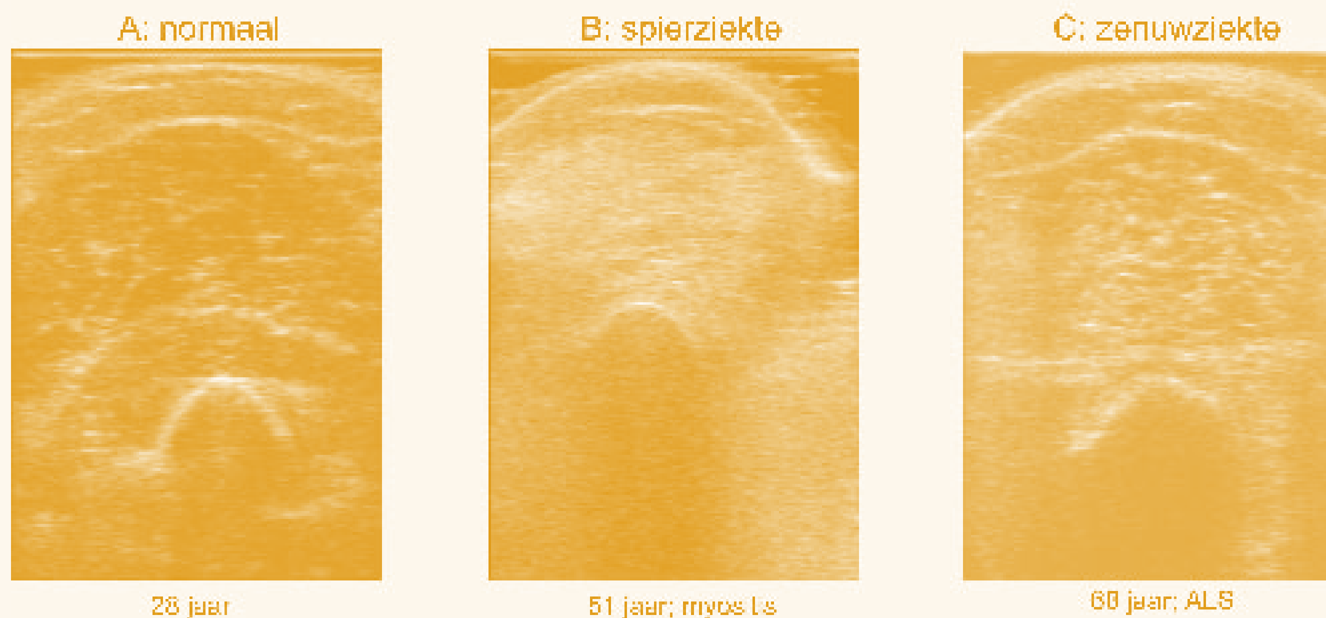
Bij echografie wordt met behulp van hoogfrequent (ongeveer 2-14 MHz) geluid een beeld gemaakt van het inwendige van het lichaam. Veel mensen kennen deze techniek wel van de prenatale echo bij ongeboren baby's. Daarnaast kan

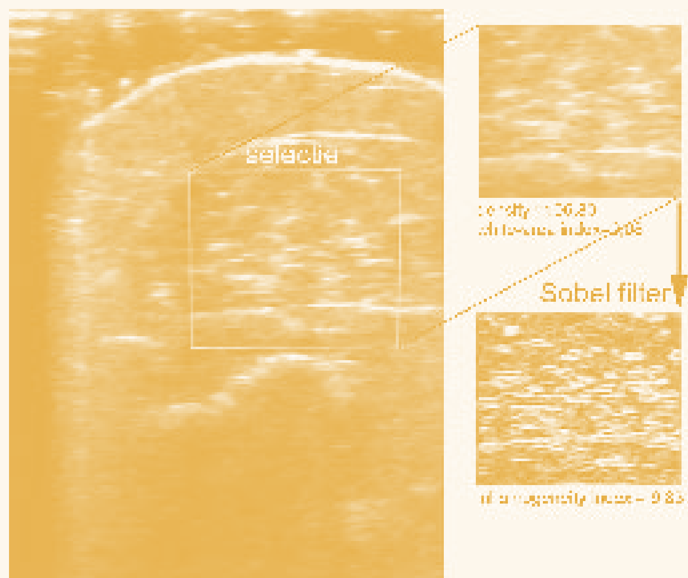
echografie o.a. gebruikt worden om op een patiëntvriendelijke manier de opbouw van de spieren in beeld te brengen. Op een dergelijk (dwars genomen) beeld van bijvoorbeeld de bovenarm, zie je van boven naar beneden de huid, de onderhuidse vetlaag, de bicepsspier en het bovenarmbot (***zie figuur 1***).
Een normaal spierbeeld laat een vrij donkere spier zien, met enkele witte streepjes of vlekjes erin en met een duidelijk zichtbare bot-echo (***zie figuur 2A***). Bij spier- of zenuwziekten wordt het beeld echter heel anders, doordat bijvoorbeeld afgestorven spiercellen worden vervangen door vet, of doordat sommige spiervezels niet meer aangestuurd worden door de zenuwen. Bij een typische spierziekte ontstaat dan een vrij homogeen witte spier, waarbij de bot-echo soms niet meer zichtbaar is (***zie figuur 2B***). Het beeld bij een echte zenuwziekte wordt gekenmerkt door vlekkerigheid, waarbij de vlekken vaker voorkomen en soms groter zijn dan in een normaal spierbeeld (***zie figuur 2C***).
Normaal gesproken worden deze beelden alleen kwalitatief op een vierpuntsschaal beoordeeld. De vraag van de arts (stap 1) was nu of de beelden ook op een kwantitatieve manier beoordeeld konden worden. Om deze vraag te vertalen naar een fysisch-mathematische vraag (stap 2) was het nodig om de kwalitatieve omschrijving van spierecho-beelden om te zetten naar meetbare begrippen. Hiervoor heb ik drie maten bedacht: voor de zwartheid van de spier (een gezonde spier is donkerder dan een zieke spier), voor de vlekkerigheid (bij een zenuwziekte zijn meer en grotere vlekken te zien dan bij een spierziekte) en voor de homogeniteit (bij een spierziekte zijn de afwijkingen homogener aanwezig dan bij een zenuwziekte).

Het bepalen van deze drie maten (stap 3 en 4) is geïllustreerd in ***figuur 3***. De analyse van een spierecho-beeld begint met normalisatie van het beeld: omdat de beelden niet altijd met dezelfde instellingen van de apparatuur worden opgenomen, kan dat anders al voor kleurverschillen zorgen. Daarna wordt in het beeld een representatief en zo groot mogelijk rechthoekig stukje van de spier geselecteerd. Voor de eerste maat ('density') wordt simpelweg de gemiddelde pixelwaarde berekend: bij gebruik van 8-bits grijswaarden heeft een zwarte pixel waarde 0 en een witte pixel waarde 255. Gezonde spieren hebben voor deze maat een lagere waarde dan zieke spieren. In het voorbeeld is deze maat gelijk aan 105,30. Voor de tweede maat ('white-area index') wordt het percentage 'witte' pixels in de spier berekend. Door veel verschillende spierbeelden te bekijken hebben we (visueel) bepaald dat voor deze maat een 'witte' pixel elke pixel is met grijswaarde groter of gelijk aan 170. Met speciale beeldanalyse-software wordt dan het aantal 'witte' pixels geteld en het oppervlak van de 'witte' pixels vergeleken met het totale oppervlak van de selectie. In het voorbeeld levert dat voor deze tweede maat een waarde 0,08 op (8% van de selectie is 'wit'). Tot slot wordt voor de derde maat ('inhomogeneity index') eerst een ruimtelijk filter (Sobel filter) toegepast, wat er voor zorgt dat scherpe kleurovergangen (grote gradiënten) in het beeld wit worden gemaakt. Dit haalt dus juist de witte vlekken naar voren. Door vervolgens het aantal afzonderlijke gebiedjes met 'witte' pixels te tellen (maar dit keer met waarde groter of gelijk aan 197) en dit te delen door het oppervlak van de selectie, kan een maat voor de inhomogeniteit worden bepaald. In het voorbeeld is dit gelijk aan 9,83 (er zijn 9,83 witte vlekjes per cm^2).

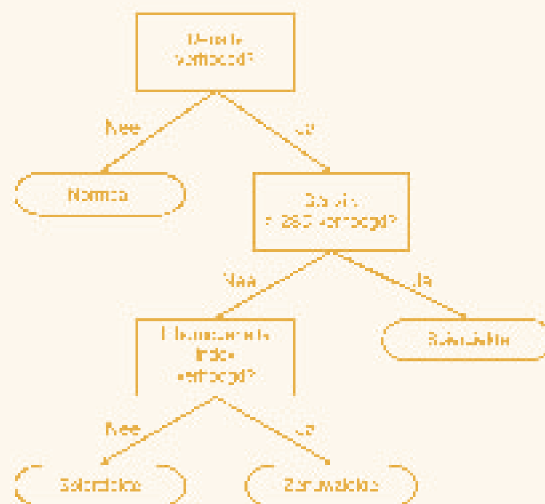
Deze bepalingen hebben we uitgevoerd bij grote groepen gezonde mensen en patiënten met spier- en zenuwaandoeningen om de relevantie van deze maten voor de

figuur 2 Spierechografie-beelden van A: gezonde (28 jaar), B: patiënt met spierziekte (51 jaar, myositis (spierontsteking)), C: patiënt met zenuwziekte (68 jaar, ALS (amyotrofische lateraal sclerose))





figuur 3 Overzicht van analyse van spierechografie-beeld



figuur 4 Beslisboom voor resultaten van spierechografie-analyse

arts te testen (stap 5). Hieruit bleek dat voor de bovenarmspier, voor bepaalde leeftijdsgerelateerde afkappunten, de drie maten normaal zijn in 93-94% van de gezonde mensen. Daarentegen bleek de 'density' afwijkend in 94% van de door ons onderzochte patiënten met spierziekten, maar in geen enkele van de patiënten met zenuwziekten. De 'inhomogeneity index' was juist afwijkend in elke patiënt met zenuwziekten en maar in 35% van de patiënten met spierziekten. Tot slot was de 'white-area index' afwijkend in 82% van de patiënten met spierziekten, maar in geen enkele van de patiënten met zenuwziekten. Samen betekent dit dat deze maten een hoog onderscheidend vermogen hebben, om zieken van gezonden en patiënten met spierziekten van patiënten met zenuwziekten van elkaar te onderscheiden. De klinische relevantie is daardoor hoog. In de praktijk (stap 6) kan de arts een beslisboom gebruiken ter ondersteuning van zijn diagnosebepaling (***zie figuur 4***).

Voorbeeld 2: Pre-operatieve functielokalisatie

Eén van onze eerste patiënten voor pre-operatieve functielokalisatie was een mevrouw van 65 jaar, die met spraakproblemen, afgenomen gevoel en verminderde motoriek in de rechterhand bij de arts kwam. Daarnaast had zij in het verleden baarmoederkanker gehad en verbeterden haar klachten na gebruik van dexamethason. Dit laatste is een medicijn dat de ophoping van vocht (oedeem) vermindert. Dit hele beeld duidde op de mogelijke aanwezigheid van een hersentumor in de linkerhersenhelft, dichtbij de delen van de hersenen die zich met spraak en met het gevoel en bewegen van de rechterhand bezig houden. Op een anatomisch MRI-beeld bleek dat er inderdaad een kwaadaardige tumor in de hersenen zat, die verwijderd moest worden. De vraag van de arts (stap 1) aan ons was nu of de belangrijke hersengebieden die zich vlak bij de tumor bevonden ook voor de operatie bepaald konden worden, zodat deze gebieden tijdens het verwijderen van de tumor zoveel mogelijk ontzien konden worden. In de vertaling naar een fysisch-mathematisch probleem (stap 2) spelen meerdere aspecten hier een rol. Welke hersengebieden moeten geïdentificeerd worden? En wanneer we zgn. bronlokalisatie willen gebruiken om hersenactiviteit te lokaliseren, hoe kan dan hersenactiviteit uit de te identificeren hersengebieden opgewekt worden?

Voor het genereren van activiteit in de hersengebieden die zich met gevoelsverwerking bezighouden kan een zogenoemde somatosensorische evoked potential (SEP) gebruikt worden. Door herhaaldelijk elektrische schokjes aan de pols te geven is het mogelijk de hersenactiviteit die gepaard gaat met het verwerken van zo'n schokje met behulp van het EEG te meten. Vervolgens kan bronlokalisatie gebruikt worden om op basis van het op de schedel gemeten EEG uit te rekenen waar dit signaal in de hersenen gegenereerd wordt. De wiskunde van dit probleem wordt samengevat in een Poisson-vergelijking voor het gemeten potentiaalveld V (stap 3):

$$\nabla \cdot J^p = \nabla \cdot (\sigma \nabla V)$$

Hierbij is σ de geleidbaarheid van het medium en J^p de primaire stroom (de sterkte van de elektrische bronnen). Wanneer je nu de geleidbaarheid en de primaire stroom kent, kun je in principe de potentiaalverdeling uitrekenen (het zgn. voorwaartse probleem). Dat kan echter alleen maar als het medium oneindig is en in alle richtingen gelijk en als de geleidbaarheid overal hetzelfde is. Helaas geldt dat voor het hoofd allemaal niet ... Daarom moeten aannames gemaakt worden over de geleider en de elektrische bronnen en wordt numerieke wiskunde gebruikt om benaderend een oplossing te vinden voor dit probleem. In plaats van het voorwaartse probleem moeten we namelijk eigenlijk het inverse probleem oplossen: gegeven de gemeten potentiaalverdeling op het hoofd (het EEG), wat zijn dan de in de hersenen gelegen bronnen en hun activiteit? Dit gebeurt iteratief en met gebruikmaking van het voorwaartse probleem (stap 4). Eerst worden aannames gemaakt over de bronnen en hun activiteit,

dan wordt uitgerekend wat de bijbehorende potentiaalverdeling is en vervolgens wordt deze vergeleken met de gemeten potentiaalverdeling. Op basis daarvan worden de aannames vervolgens aangepast en wordt de volgende iteratie doorlopen.

In de praktijk zijn verschillende onderdelen nodig om bij een patiënt als hierboven bronlokalisatie uit te voeren: naast een SEP met hoge resolutie (registratie met 128 elektroden), is een anatomische MRI nodig om een individueel hoofdmodel te maken en moet de 3D-positie van de elektroden digitaal worden vastgelegd om te weten waar het EEG ten opzichte van de eronder gelegen hersenen precies is geregistreerd. Maar als al deze puzzelstukjes beschikbaar zijn kan ook de hele puzzel gelegd worden. Bij de patiënte hierboven leverde dit een bron op voor de SEP die, zoals verwacht, zeer dicht bij de tum or gelegen was (stap 5 en 6; ***zie figuur 5***). De tumor kon vervolgens met succes en zonder schade aan belangrijke hersengebieden worden verwijderd.

Voorbeeld 3: Tremorregistratie

Tremorregistraties worden gebruikt om bewegingsstoornissen waarbij trillen - van meestal de handen - optreedt, van elkaar te kunnen onderscheiden. Dit is echter niet altijd even gemakkelijk. In ***figuur 6*** staan stukken van een tremorregistratie (EMG van onderarmspieren) van twee tremorpatiënten die elk aan een andere ziekte lijden (familiaire corticale myoclonische tremor met epilepsie (FCMTE) en essentiële tremor (ET)).Hoewel er wel wat verschillen te zien zijn in deze twee registraties is de diagnose van deze ziektebeelden voor de arts niet altijd even gemakkelijk te maken. De vraag aan ons (stap 1) was nu of het mogelijk is om op basis van een tremorregistratie deze twee ziektebeelden te onderscheiden.
Voor de vertaling van deze vraag naar een fysisch-mathematisch probleem (stap 2) is het belangrijk te weten dat van FCMTE gedacht wordt dat dit in de cortex - de buitenste laag van de hersenen - gegenereerd wordt, terwijl dit voor ET waarschijnlijk niet zo is. Dat bracht ons op het idee om het verband tussen de gemeten spieractiviteit en met EEG gemeten hersenactiviteit te onderzoeken. In principe kan dit op (minstens) twee manieren; met behulp van zogenoemde back-averaging of coherentieanalyse (stap 3). Back-averaging werkt alleen maar als je in het EMG afzonderlijke tremor bursts - 'aanvallen van tremor' - kunt onderscheiden en markeren, zodat je vanaf het begin van zo'n burst terug in de tijd in het EEG kunt kijken of de tremor in de cortex wordt gegenereerd. Bij FCMTE werkt dat niet omdat de afzonderlijke bursts niet te onderscheiden zijn (***zie figuur 6***). Voor coherentieanalyse is dat echter geen probleem. Een hoge coherentie tussen EEG en EMG geeft aan dat er een functioneel verband is tussen de twee. Simpel gezegd komt coherentie overeen met correlatie in het frequentiedomein. De coherentie $\hat{R}_{xy}$ (in het kwadraat) tussen twee signalen x en y als functie van de frequentie λ wordt dan ook berekend als het quotiënt van het kruisspectrum $\hat{f}_{xy}$ in het kwadraat en het product van de autospectra $\hat{f}_{xx}$ en $\hat{f}_{yy}$:

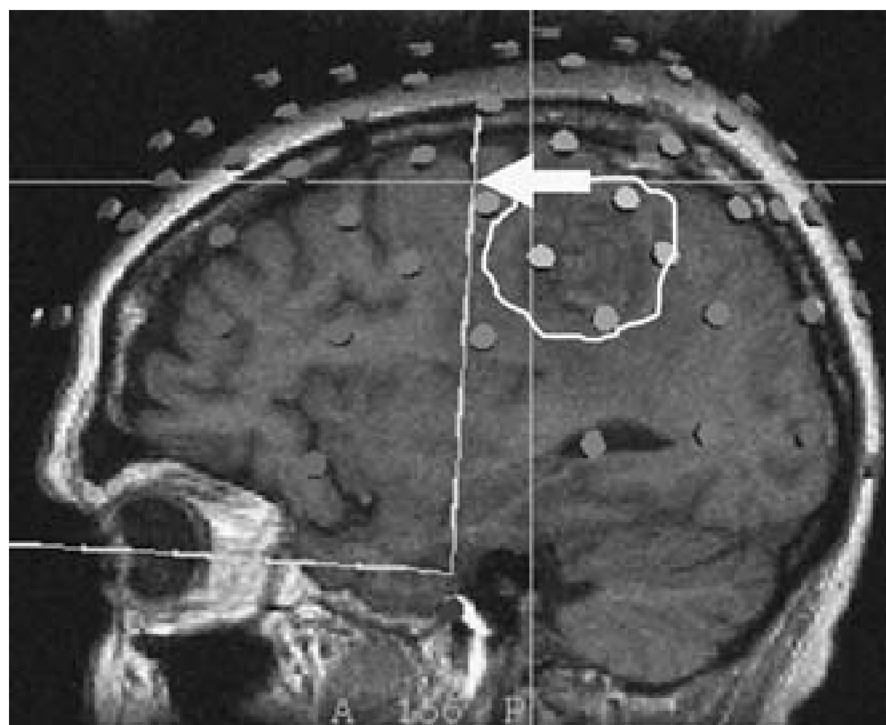
$$|\hat{R}_{xy}(\lambda)|^2 = \frac{|\hat{f}_{xy}(\lambda)|^2}{|\hat{f}_{xx}(\lambda)|^2 \cdot |\hat{f}_{yy}(\lambda)|^2}$$

De waarde van de coherentie varieert tussen 0 (geen verband) en 1 (identiek signaal). Naast de coherentie tussen EEG en EMG kan ook de coherentie tussen EMG en EMG van twee verschillende spieren bekeken worden. Om de waarde van coherentieanalyse voor de klinische praktijk te bekijken (stap 4 en 5) hebben we EEG-EMG en EMG-EMG coherenties uitgerekend voor groepen van gezonde mensen en patiënten met FCMTE of ET. Hieruit bleek dat EMG-EMG coherentie in twee bepaalde frequentiebanden (4-8 Hz en 8-30 Hz) kan helpen onderscheid te maken tussen deze groepen. In de 4-8 Hz band blijken beide typen patiënten een hogere coherentie te hebben dan gezonde mensen. In de 8-30 Hz band is specifiek de coherentie bij FCMTE patiënten erg hoog. Samen maakt dit coherentieanalyse bruikbaar voor de differentiaaldiagnose van deze patiënten.

'Echte wiskunde' in het ziekenhuis en op school

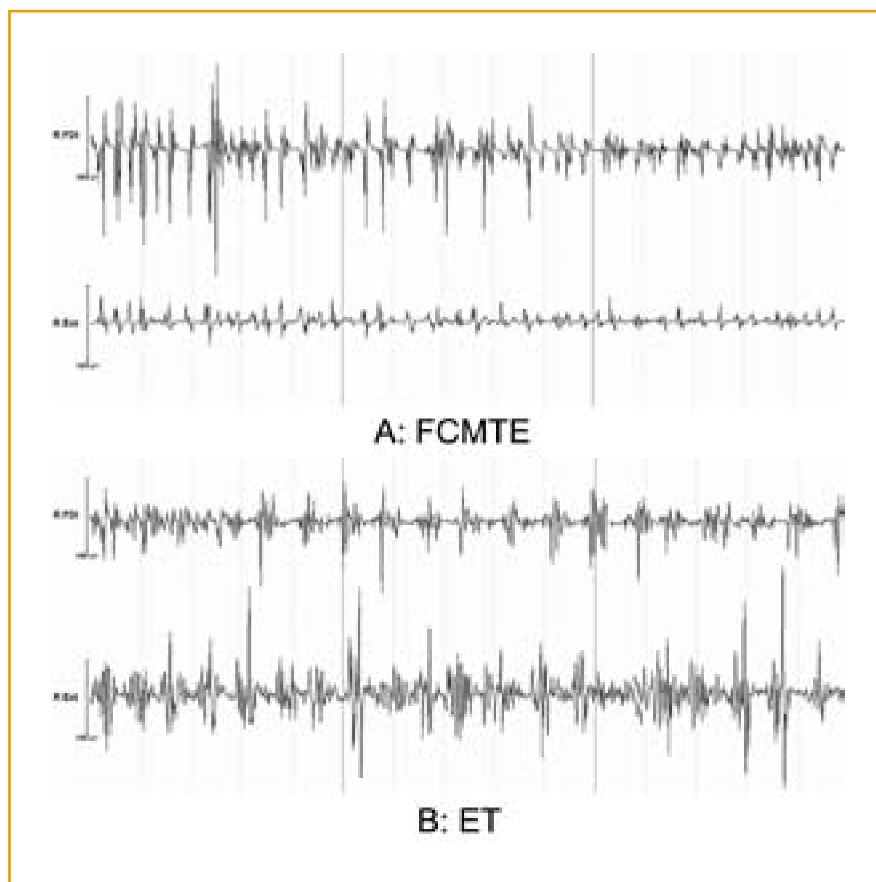
Welke wiskunde is nu de revue gepasseerd in de hier genoemde voorbeelden? Is dat 'echte wiskunde'?
In voorbeeld 1 werden zowel beschrijvende statistiek als filtertechnieken toegepast, in voorbeeld 2 werd gebruik gemaakt van integraalvergelijkingen en numerieke wiskunde en in het laatste voorbeeld tenslotte kwam frequentieanalyse aan de orde. Geen zuiver wiskundige zou betwijfelen dat dit allemaal echte wiskunde betreft.

figuur 5 Anatomische MRI van patiënte uit voorbeeld 2. De pijl geeft de gevonden positie van de SEP-bron aan, de grens van de tumor is met een witte lijn aangegeven.



Een wiskundige in de praktijk moet echter wel over meer vaardigheden beschikken dan alleen zuiver wiskundige. Aan de hand van het 7-stappen-plan tekent zich het volgende lijstje van vaardigheden af: communicatie- en inlevingsvermogen en specifieke (in mijn geval medische) vakkennis (stap 1), wiskundige basis en geavanceerde kennis, modelleervaardigheid (stap 2 en 3), medisch-ethisch gevoel (vanwege, in mijn geval, het onderzoek op mensen), software- en programmeerkennis (stap 4), statistische vaardigheden, schrijfvaardigheid en (weer) communicatievermogen (stap 5-7).

Heeft dit nu consequenties voor het onderwijs op middelbare school en universiteit? Moet er meer aandacht aan de zuivere wiskunde of aan de toegepaste wiskunde (met concrete voorbeelden) worden besteed, of moet er nog meer vaardigheidsonderwijs komen? Hoe langer ik over deze vraag nadacht, hoe moeilijker ik het vond om hierop een antwoord te geven. Uit mijn praktijkvoorbeelden blijkt in elk geval dat de zuivere en toegepaste wiskunde niet zonder elkaar kunnen. In de voorbereiding van dit verhaal heb ik ook naar enkele delen van een veel gebruikte wiskundemethode op het vwo gekeken. Wat mij daarin opviel was dat het lijkt alsof elke wiskundesom aan de hand van een verhaaltje geïntroduceerd wordt. Daarbij varieert het thema vaak zelfs van som tot som. Dit maakt het onderliggende, vaak identieke, wiskundeprobleem mijns inziens juist lastiger te herkennen. Het andere uiterste van een wiskundemethode - het eindeloos herhalen van rijtjes van sommen zonder context - is natuurlijk ook niet aan te bevelen. Het nut zal menigeen ontgaan en teveel herhaling zal snel tot verveling leiden. Daarentegen kan het erg bevredigend zijn om op die manier een vaardigheid aan te leren: er is snel resultaat en een leerling kan zichzelf gemakkelijk controleren aan de hand van een antwoordenboek. Een goede balans tussen 'kale' en 'aangeklede' sommen lijkt daarom aan te bevelen. Een wiskundige techniek zou dan bijvoorbeeld wel vanuit een toepassing geïntroduceerd kunnen worden, waarna eerst de vaardigheid verder geoefend wordt en tot slot wordt gedemonstreerd dat dezelfde wiskunde ook in andere toepassingen gebruikt kan worden. Misschien dat op die manier, ook voor leerlingen, het verband tussen wiskunde in theorie en praktijk duidelijker wordt.



figuur 6 Tremorregistraties (3 seconden) van A: patiënt met FCMTE en B: patiënt met ET

Noot

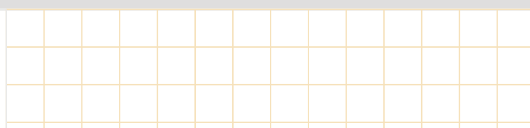
Dit artikel is gebaseerd op een presentatie die door de auteur gehouden werd op het Nederlands Mathematisch Congres op 13 april 2007 in Leiden.

Achtergrondinformatie

Voorbeeld 1 - N.M. Maurits e.a. (2003): *Muscle ultrasound analysis: normal values and differentiation between myopathies and neuropathies*. In: Ultrasound Med. Biol. 29:215.
Voorbeeld 2 - Natasha Maurits (2003): *Een wiskundige kijk in de hersenen*. In: Nieuw Archief voor Wiskunde, 5/4:216.
Voorbeeld 3 - A.F. van Rootselaar e.a. (2006): *Coherence analysis differentiates between cortical myoclonic tremor and essential tremor*. In: Mov. Disord. 21:215.

Over de auteur

Natasha Maurits is toegepast wiskundige (RuG, 1994), en sinds 2006 adjunct-hoogleraar biomedische signaalanalyse bij de afdeling Klinische Neurofysiologie van het Universitair Medisch Centrum Groningen, waar zij sinds 1999 werkt. Ze ontwikkelt nieuwe analysemethoden gericht op klinische toepassingen. Hierbij wordt de gebruikte neurofysiologische techniek (multikanaals EEG, simultaan EEG-fMRI, simultaan EMG-fMRI of ultrageluid) steeds bepaald door de klinische problematiek. Door een sterke interactie met de kliniek en multidisciplinaire samenwerking, o.a. binnen het BCN Neuroimaging Centrum, hoopt ze het begrip, de diagnostiek en de prognosebepaling te verbeteren van neurologische aandoeningen zoals hersenletsel, dementie, MS en bewegingsstoornissen. Hierbij staat steeds de vraag centraal: 'Is meer meten ook meer weten?'
E-mailadres: *n.m.maurits@neuro.umcg.nl*



Geocadabra en meetkunde-opgaven

EEN BESPREKING

[Floor van Lamoen]

Sinds de vlakke meetkunde terug is in de schoolwiskunde heeft menig docent zich mogen storten op dynamische meetkundesoftware. Een nieuwe meetkundewereld ging daarmee open, want wat tot dan toe onmogelijk was werd mogelijk: iedereen kon precieze schetsen maken en door in figuren punten te slepen zien wat daarvan het effect was. Een leuke *tool* waarmee de leerlingen konden leren te stoeien met opgaven. Marktleider in Nederland werd *Cabri*, maar internationaal is ook *Geometer's Sketchpad* een grote speler.
In Nederland is er collega Ton Lecluse die zich niet heeft neergelegd bij dominantie van buitenlandse software. Hij maakte zijn eigen dynamische meetkundeprogramma, dat zeker gezien mag worden. Het is een betrouwbaar programma, waarin naast meetkunde ook andere wiskundesoftware zit, zoals lineair programmeren, correlatie en regressie en dynamische modellen. Hoewel ik Geocadabra kende, had ik me nooit erg verdiept in het programma. Totdat me werd gevraagd voor deze recensie eens speciaal te kijken naar een nieuw onderdeel van Geocadabra, het 'meetkundig onderzoek'.

Meetkundig onderzoek

In de laatste versie van Geocadabra zit een *feature* 'Meetkundig onderzoek', die het programma laat zoeken naar gelijke hoeken, naar gelijke afstanden, naar loodrechte stand of parallellie, of naar koordenvierhoeken. Met een extra vinkje kan zelfs gezocht worden naar congruente, gelijkvormige en gelijkbenige driehoeken. Daarin kan worden gekozen voor 'verborgen' informatie, waarin nog niet getekende lijnstukken een rol spelen, geschikt om als hulplijn te dienen. Kan dit ons helpen met het componeren en oplossen van vraagstukken?

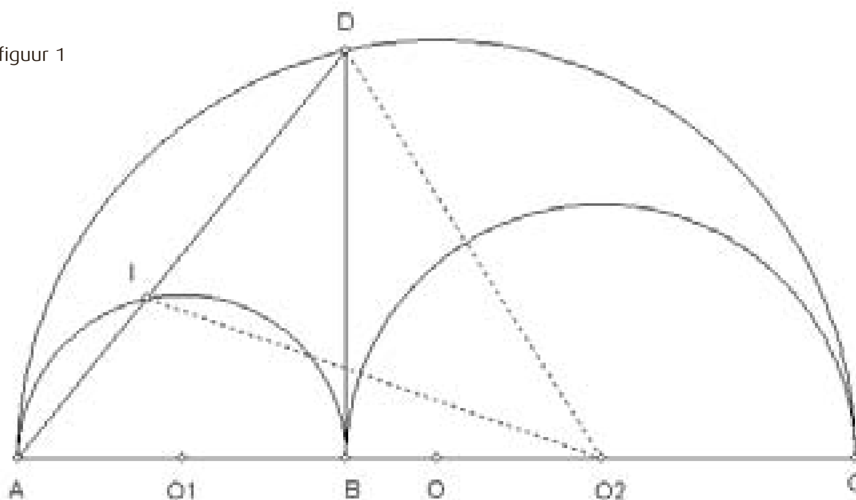
Daarvoor bekijken we een opdracht in de *arbelos*, een figuur van drie elkaar rakende halve cirkels waarvan de raakpunten en middelpunten op een lijn liggen (***zie figuur 1***). De loodlijn op AC door B snijdt de grote halve cirkel in D. De lijn AD snijdt de ene kleine halve cirkel in I. De opdracht luidt om te laten zien dat het middelpunt van de andere kleine halve cirkel, O2, even ver ligt van I als van D.

Misschien ziet u de oplossing meteen. Maar anders kan Geocadabra via de optie *meetkundig onderzoek* uitkomst bieden (***zie figuur 2***). We kiezen ook voor de verborgen opties, en zien in het scherm allerlei tildes (~), die aanduiden dat er ontbrekende lijnstukken zijn. Wie het lijstje doorwerkt ziet dat de meeste getoonde identiteiten eenvoudig zijn te verklaren. Wie nog altijd op zoek moet naar de oplossing, kan nog meer laten onderzoeken en bijvoorbeeld het vinkje *driehoeken* zetten (***zie figuur 3***; ik heb de gelijkbenige driehoeken buiten beeld gelaten). De bovenste van de genoemde congruenties is nu de sleutel tot het bewijs, dat ik verder graag aan de lezer overlaat. Handig!

Complexiteit

Ik kwam op dit probleem toen ik met Geocadabra ging kijken naar een bekende eigenschap van de arbelos. Wanneer we aan de inmiddels bekende figuur ook de lijn CD toevoegen, met snijpunt J op de tweede halve cirkel **(zie fig. 4 op pag. 315)**, dan is IBJD een rechthoek. Ik stopte het plaatje in Geocadabra, ging kijken naar het meetkundig onderzoek, en daar stond heel onverwacht de opgave van hierboven!
De figuur is uitgebreider dan hierboven, en er is met de rechthoek flink wat informatie bij gekomen die tot de oplossing van het probleem kan leiden. Is door toevoeging van punt J het probleem er ook eenvoudiger van geworden? U zou misschien denken van wel. U ziet meteen de rechthoek, en hoe die beredeneerd kan worden. De manieren om het probleem bij de horens te vatten zijn daarmee uitgebreid. We kunnen nu bijvoorbeeld gaan voor de congruentie van O2BI en O2JD. Maar - dit is toch wel een behoorlijk complexe oplossing! Dat geldt helemaal als we laten zien dat IJ een gemeenschappelijke raaklijn is van de twee kleine halve cirkels, en dat gebruikend laten zien dat O2IJ en O2BD

figuur 1



congruent zijn. We komen er, maar de oplossingen zijn complexer. Leerlingen zullen het dus vermoedelijk niet sneller vinden. Het meetkundig onderzoek van Geocadabra maakt dat inzichtelijk, want er staat, als we meetkundig onderzoek vragen, werkelijk een stoet aan informatie. Voor u als opgavemaker biedt dat de mogelijkheid om met handige deelvragen leerlingen op weg te helpen.
Gaan we nog meer punten toevoegen, desinformatie, dan is de kans groot dat leerlingen door de bomen het bos niet meer zien. Zij gaan aan de slag met het verkeerde punt en komen nergens. Wie het snijpunt van O2D en de tweede halve cirkel toevoegt (zeg E) en zich het hoofd buigt over de gelijkheid van hoeken BED, CJE en ABE, zal met het probleem niet veel verder komen.



figuur 2



figuur 3

Geocadabra

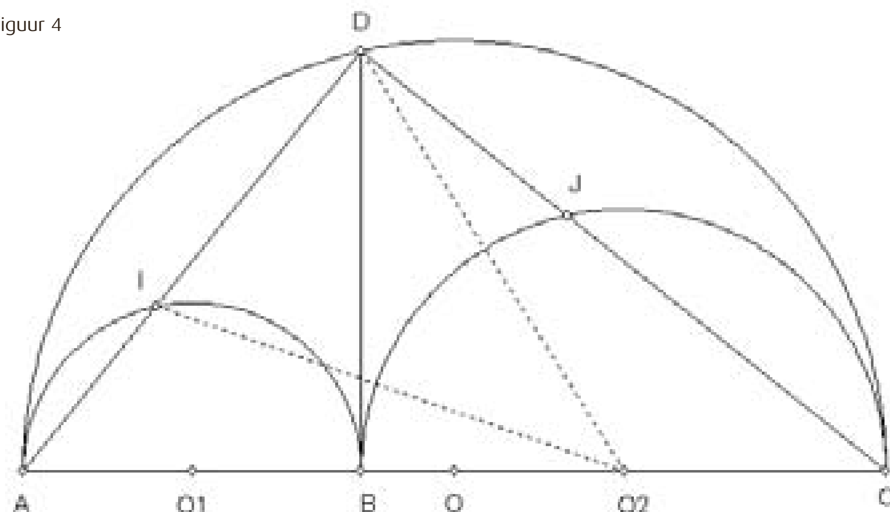
Ik heb nogal een tijdje doorgespeeld met Geocadabra. Stop er een figuur in, ga er wat mee spelen, en via de optie *Meetkundig onderzoek* is het een koud kunstje om met een leuke opgave te komen. Ook kunnen we goed zien hoeveel informatie er verborgen zit in de figuur, en of er niet teveel desinformatie bij is. Daarmee heeft dit programma een flinke meerwaarde gekregen, boven de bekende dynamische meetkunde software van de grote makers.
Het programma Geocadabra is daarbij mooi uitgevoerd; tekeningen kunnen met de *animatie*-optie heel mooi dynamisch worden gemaakt en als een filmpje worden afgespeeld. Het is een klein ongemak dat voor het tekenen van een punt, cirkel, lijn en dergelijke meerdere muisklikken in een menu moeten worden gedaan (en niet slechts een klik op één icoontje), een draaglijke hindernis. Een irritanter puntje vind ik dat bij het 'ongedaan maken' per ongeluk getekende punten niet worden verwijderd, en dat je die echt moet *deleten*. Komen we weer bij een pluspunt: als je iets wil deleten, geeft het programma voor verwijdering aan wat er meeverwijderd wordt, zodat je niet meteen de halve figuur verknalt.
Proficiat, Ton, een prachtprogramma.

'Geocadabra'
Auteur: Ton Lecluse
Uitgever: Visiria Uitgeversmaatschappij, Franeker (*www.visiria.nl*)
Prijs voor een schoollocatielicentie: € 540,00; leerlinglicentie: € 108,00 per schooljaar, ongeacht het aantal leerlingen.
Een demo gratis is downloadbaar van *www.geocadabra.nl*.
Op deze website is ook nadere informatie te vinden.

Over de recensent

Floor van Lamoen is wiskundeleraar aan het St. Willibrordcollege te Goes, en als meetkundefanaat redacteur van het meetkunde-*journal* Forum Geometricorum.
E-mailadres: *fvanlamoen@planet.nl*

figuur 4



Ik las en dacht...

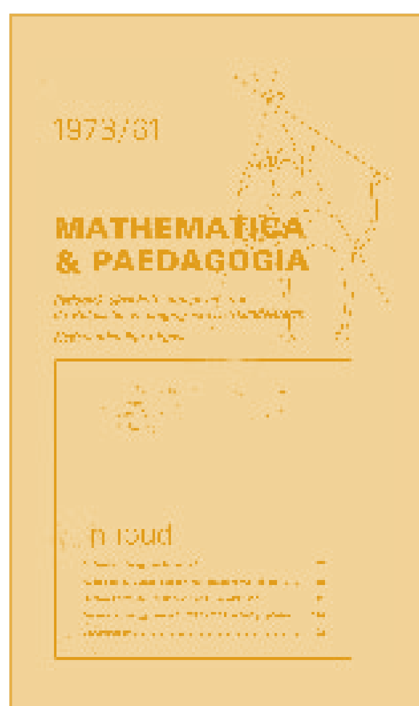
[Klaske Blom]

In oude jaargangen van vaktijdschriften over ons wiskundeonderwijs vinden we regelmatig artikelen die in het licht van huidige onderwijsontwikkelingen opeens opmerkelijk worden. Soms omdat ze, geschreven in een totaal andere tijd, een verfrissend perspectief op onze huidige situatie bieden, soms omdat ze, ondanks hun gedateerdheid, verrassend actueel blijken te zijn, omdat ze tot nadenken stemmen, omdat...
In de rubriek 'Ik las en dacht...' neemt Klaske Blom u mee naar zo'n 'oud actueel artikel'.

Binnen- en buitenwereld

Ongeïnteresseerd gedrag

'*In onze utilitaristische wereld kennen we al jaren het weifelend en ongeïnteresseerd gedrag van jonge mensen tegenover de hun onderwezen vakken.*'
Is dat zo? Herkennen we dit gedrag bij onze leerlingen? Uit welk jaar komt dit citaat? Raadt u eens? Dit kan toch niet waar zijn, uit 1973! Dat was zo ongeveer toen ik naar de middelbare school ging. En ik was helemaal geen ongeïnteresseerde leerling! En mijn medescholieren heus ook niet. Ja ik geef toe, soms, bij sommige vakken. Maar dan lag het wel aan de leraar eigenlijk…



Het is een rare gewaarwording om een dergelijke uitspraak in eerste instantie met een zekere herkenning te lezen en dan, door het plotselinge inzicht dat het hier mijn eigen generatie betreft, de herkenning onmiddellijk te voelen omslaan in verontwaardiging. Als docent herken ik de uitspraak, maar als oud-leerling helemaal niet. Dat wil zeggen, het lukt me eigenlijk niet om aan mezelf alleen maar als leerling terug te denken. Ik was gewoon een puber, die ook op school zat, veel hobby's en vrienden had, en zo eentje die de wereld wilde verbeteren. Ik deed mijn huiswerk en mijn best en niet alle schoolvakken boeiden me, maar ongeïnteresseerd zou ik mezelf in het algemeen nooit genoemd hebben.
Nog eens terug naar het citaat; het staat er eigenlijk heel zorgvuldig geformuleerd: 'ongeïnteresseerd *gedrag* van jonge mensen'. Het gaat dus niet om ongeïnteresseerde jonge mensen, maar om ongeïnteresseerd gedrag. En dat herken ik wel, zo'n leerling was ik ook soms: ik zat achterstevoren bij Frans, kon midden in de les met niet-ter-zake-doende afleidende vragen komen bij geschiedenis om maar tijd te rekken, en vroeg me hardop af wat het nut was van de te leren zaken bij natuurkunde als ik het te moeilijk vond. Bij sommige vakken raakte ik gewoon niet betrokken. En de vraag is natuurlijk: waarom was ik dat bij het ene vak wel, en bij het andere vak niet? En u, als u zich uw eigen schoolcarrière voor de geest haalt? Hoe zat het met uw (on)geïnteresseerd gedrag bij de diverse vakken? Raakte u wel of niet geboeid? En waardoor of door wie wel?

Ongeïnteresseerd gedrag ten opzichte van het vak wiskunde

Wat de interesse van leerlingen voor het vak wiskunde betreft wil ik u een deel van een artikel voorleggen waaruit het citaat van de eerste zin komt. Het is een artikel uit 'Mathematica & Paedagogia', periodiek tijdschrift uitgegeven door de Belgische Vereniging van Wiskundeleraren, Nederlandse uitgave van 1973.
Hierin gaat Herman van Looy op zoek naar de oorzaken voor de toename van ongeïnteresseerd gedrag van leerlingen tegenover wiskunde.

> Het realiteitsverlies in de wiskunde
>
> In onze utilitaristische wereld kennen we al jaren het weifelend en ongeïnteresseerd gedrag van jonge mensen tegenover de hun onderwezen vakken. Een vak dat in dit opzicht nog vrij goed voor de dag kwam, was de wiskunde; zelfs menig onkundig student zag er nut in. Nochtans sedert de invoering van de moderne wiskunde in het onderwijs, is ook de wiskunde onderhevig aan dit verschijnsel. De symptomen hiervan merken we in uitspraken als: "Is dit nu echt nodig?", "Wat wil dat nu eigenlijk zeggen?" Zelfs in de sterk wiskundige afdelingen, waar de interesse echt aanwezig is, treft men die onzekerheid aan bij de leerlingen en wellicht ook bij sommige leraars, vooral als we denken aan niet-intuïtief vatbare uitdrukkingen. Het is daarom interessant om eens te onderzoeken waar deze accentuering van het realiteitsverlies in de wiskunde zijn oorsprong vindt, wat uiteraard een beknopt historisch overzicht vereist.
> De Griekse wiskunde in de klassieke periode steunde op een soort empirische zekerheid, waar niemand zich zorgen over maakte; het was bijna een natuurkunde. De vragen "Waarom is 2 + 3 gelijk aan 5?" en "Waarom is de snelheid bij een vrije val gegeven door $v = v_0 + gt$?" zouden toen tot dezelfde kategorie behoord hebben en glimlachend opgelost zijn met de woorden: "Omdat het zo is!". Nu daarentegen zou de eerste vraag door iedere wiskundige beantwoord worden met een uiteenzetting gevuld met axioma's, stellingen en logische denkpatronen. Alhoewel de opbouw van de Griekse meetkunde onze bewondering verdient, zijn de fundamenten van de wiskunde in het algemeen, zeer vaag gebleven. Voor hen (en velen van ons) leken ze als vanzelfsprekend. Denken we hierbij aan de verschillende getallenverzamelingen, die geen degelijke basis hadden en waarin het getal 0 zelfs eeuwenlang verdacht bekeken werd (als het tenminste aandacht kreeg).
> Zo heeft men tot in de 19e eeuw (en in het middelbaar onderwijs tot in de 20ste eeuw) met de wiskunde voortgewerkt in de waan dat dit een 'vaststaande waarheid' was met de wortels in de realiteit en met vruchten uitsluitend voor de realiteit. Een zware klap kreeg echter deze realiteits-gebonden wiskunde wanneer Gauss, Lobatchevsky e.a. hun niet-Euclidische en meteen niet-empirische meetkunde publiceerden. Toen werd het velen duidelijk dat een wiskunde bepaald was door zijn grondslagen, zijn axioma's. Men moest bijgevolg dringend de wiskunde die men gebruikte gaan axiomatiseren, d.w.z. klaar omlijnde grondslagen gaan toekennen i.p.v. een vage oorsprong in de realiteit.
> […]
> Daarom is het nodig bij de leerlingen dit realiteitsverlies bewust te maken en te ondervangen. Dit kan vooral gebeuren bij het aanbrengen van de axioma's door te onderstrepen dat dit een beredeneerde keuze is en dat men bijgevolg in principe anders kan kiezen maar dan met alle bijbehorende gevolgen en moeilijkheden, die een te vlugge keuze meebrengen. Tevens zal een historische belichting van dit probleem vele geïnteresseerde leerlingen het gevoel van onzekerheid vervangen door het besef dat ze creatief kunnen meewerken aan een levend geheel, waarvan de logische denkpatronen de grenzen van de wiskunde ver te buiten gaan. Tot slot weze nog gezegd dat deze bewustwording bij de leerlingen niet kan verwezenlijkt worden zonder een enthoesiaste leraar die zelf de situatie voldoende inziet en die bereid is de geboden pedagogische middelen te gebruiken, die god zij dank in menig handboek aanwezig zijn.

Als ik het artikel goed interpreteer, koppelt Van Looy ongeïnteresseerd gedrag aan onzekerheid, met name over niet-intuïtieve wiskundige zaken, zoals axioma's, stellingen en logische denkpatronen. Wiskunde is niet meer een vaststaande waarheid, dat wat je leert niet meer gebaseerd op de realiteit.
Vroeger was het duidelijk waar de wiskunde vandaan kwam en waartoe het diende.
Vanaf de twintigste eeuw werd wiskunde een puur logische aangelegenheid. Voor het onderwijs betekende dit dat begrippen die vroeger empirisch werden aangebracht vanaf dat moment niet meer werkelijkheidsgebonden hoefden te zijn.
Ik ben niet op de hoogte met het Vlaamse onderwijssysteem van de zestiger en zeventiger jaren, maar bovenstaande klinkt alsof de verzamelingenleer een duidelijke plaats verworven had. En juist dit meer formele onderwijs leidt tot een pleidooi om het realiteitsverlies van de wiskunde bewust te maken en te ondervangen. En tot een pleidooi voor het bespreken van de historische ontwikkeling van de wiskunde om leerlingen het gevoel te geven dat ze er deel van zouden kunnen uitmaken. Beide zaken zouden de onzekerheid van leerlingen over het formele systeem weg kunnen nemen. En, en dat vul ik dan zelf maar in, met het verdwijnen van die onzekerheid zou ook het ongeïnteresseerde gedrag afnemen. Het klinkt mij heel logisch.

Ongeïnteresseerd gedrag tegenover wiskunde anno 2007

Maar, onze huidige leerlingen komen nauwelijks een formeel systeem meer tegen. Veel van de wiskunde die ze aangereikt krijgen, wortelt in de realiteit, en wordt aangeboden in een reële context. Dat het vaak een schijncontext is staat buiten kijf, maar de benadering is in ieder geval eerder intuïtief dan formeel, zelfs voor wiskunde B-leerlingen. En ook bij deze leerlingen komen we het benoemde ongeïnteresseerde gedrag tegen. Ligt hier ook een onzekerheid aan ten grondslag? Onzekerheid waarover dan? En wat zou dan de remedie zijn?
We zijn immers al teruggekomen op de verzamelingenleer in het huidige onderwijs, en we doen immers al een poging tot het aanbrengen van een realiteitskader? (Volgens sommigen schuilt juist daarin het probleem van ongeïnteresseerdheid.)
In dit verband wil ik een recent interessant



Jan Steen, Dorpsschool (ca. 1670)

artikel noemen dat ik van een collega kreeg over een onderzoek van Thomas Ziehe (hoogleraar pedagogiek aan de Universiteit van Hannover), naar de verhouding jeugd-school en het leerklimaat op school. Ziehe beschrijft een aantal culturele veranderingen die van invloed zijn op leren en school-gedrag van leerlingen [1]. Kort samengevat komt het hier op neer [2]:

> De eigen wereld van jongeren is de norm geworden; voor jongeren is hun eigen wereld de bron van criteria om vast te stellen wat interessant en relevant is. Deze gerichtheid op de eigen wereld gaat samen met een gerichtheid op sociale relaties met leeftijdgenoten en richt de blik naar binnen. De afstand van jongeren tot formele talen, zoals boeken-taal, wiskunde en logica, is gegroeid. Leerlingen begrijpen schoolboeken minder en vallen stil in formele situaties. Hun vermogen om structuur te verin-nerlijken is zwakker geworden. Jongeren zijn erg gericht op hun eigen wereld en accepteren moeilijk wat cognitief anders is. Ze willen graag directe herkenbaar-heid maar hebben tegelijkertijd het verlangen om niet opgesloten te blijven zitten in die eigen wereld. Daarbij hoort ook het verlangen om zich formele talen en situaties wel eigen te maken, om daardoor zelf meer structuur te kunnen aanbrengen in hun leven en innerlijke rust te kunnen ervaren.

Het is volgens Ziehe van belang dat we jongeren perspectief bieden op een leerklimaat waarin met deze culturele veranderingen – die niemands schuld, maar wel werkelijkheid zijn – rekening houden. Leraren hebben de taak leerlingen te intro-duceren in een voor hun ‘vreemde’ wereld. Daartoe moet er hard gewerkt worden aan het begrip van tekststructuur en aan het abstraheren. Dit alles in een gestructureerde omgeving, omdat leerlingen die structuur uit zichzelf niet kunnen aanbrengen.
Leerlingen moeten uit hun eigen wereld getrokken worden, door gebruik te maken van het (verborgen) verlangen dat jongeren hebben naar trots op wat bereikt is.
Docenten kunnen een brugfunctie zijn tussen de eigen wereld van hun leerlingen en de andere werelden die daarbuiten open liggen, door voor te leven dat je verdiepen in een vak kan leiden tot enthousiasme en verwondering.

Voor het vak wiskunde zou ik dat kunnen vertalen als een pleidooi voor een meer formele in plaats van een intuïtieve aanpak van ons onderwijs. Dus misschien is nu pas de tijd rijp om verzamelingenleer in te voeren in ons onderwijs. Of beter gezegd: de veranderingen in de jeugdcultuur vragen om meer formaliteit en structuur in het onderwijs en voor wiskunde zou dit kunnen betekenen dat formele systemen weer een belangrijker plaats krijgen.
In de tijd van Van Looy was de tijd er misschien nog niet rijp voor omdat de jeugd nog aan het vechten was voor vrijheid en het maken van eigen keuzes. Formele systemen riepen onzekerheid op omdat juist nog ten strijde getrokken moest worden tegen die formele buitenwereld. Nu kan een formeel systeem structuur bieden en de chaos die jongeren met hun eigen wereld met zich meebrengen, verminderen.
Maar lopen we dan in het onderwijs altijd achter de maatschappelijk-culturele ontwik-kelingen aan? Ik weet het niet, maar zou het slecht zijn?

Ten slotte

Van Looy beschrijft de vraag die een leerling stelt: ‘Waarom is 2 + 3 gelijk aan 5?’ Ik zie uit naar de leerling die die vraag eindelijk eens stelt. Dan kunnen we namelijk aan de slag! Als de vraag eerst maar eens zou komen. Door Ziehe begrijp ik nu dat die vraag niet komt als ik mijn leerlingen niet eerst uit hun eigen wereld trek; want het stellen van deze vraag lijkt een vermoeden van het bestaan van een mogelijk andere realiteit te verraden, van de mogelijkheid dat het ook wel eens *niet* zo zou kunnen zijn dat 2 + 3 gelijk is aan 5. En dat impliceert een gerichtheid op iets anders dan het bekende zelf. Dat betekent ook het talent om vanuit meerdere perspectieven naar een probleem te kijken. En dat valt nog niet mee.

Noten

[1] Thomas Ziehe*: Attitudes towards Science / Values and Identities Among Children and Youth*. Copenhagen, 8 november 2002, *Changes and Challenges, a Conference on the Natural Sciences and Technology*.
[2] Samenvatting door Sarah Blom (ILO, UVA).

Over de auteur

Klaske Blom is redacteur van Euclides en wiskundedocent in Amersfoort aan het Meridiaan College, vestiging ‘t Hooghe Landt.
E-mailadres: *kablom@tiscali.nl*

Van Melsen Prijs 2007 voor wiskundige puzzels

PROFIELWERKSTUKKEN WISKUNDE BEKROOND

[Pieter van der Hoeven]

Komt het door de verschillende masterclasses wiskunde en de populariteit van getallenpuzzels zoals sudoku's? Het aantal wiskunde-inzendingen was met 14 hoger dan ooit en de hoofdprijs van de Van Melsen Prijs 2007, de jaarlijkse prijs van de Radboud Universiteit Nijmegen voor de beste profielwerkstukken, is ex aequo gewonnen door twee scholierenteams met een werkstuk over een wiskundig onderwerp.

Prijswinnaars

Jesse Hoekstra en Willem Schilte van het Dominicus College in Nijmegen krijgen samen met Petra Alkema van het Gymnasium Bernrode in Heeswijk-Dinther de eerste prijs voor hun meest magische vierkant, waarmee ze ook al eerder in de publiciteit waren. Tijdens de masterclass wiskunde in Nijmegen hebben ze het 3 bij 3 magisch vierkant geanalyseerd en daarvoor een algemeen geldende formule opgesteld. Ook hebben ze meerdere magische vierkanten onderzocht, onder andere de Franklin magische vierkanten. Ze hebben zelf een 12 bij 12 vierkant bedacht met heel veel magische eigenschappen.

De andere eerste prijs gaat naar Valentijn Karemaker, Brigitte Sprenger en Bruno van Albeda, van het Junior College Utrecht voor hun werkstuk over schuifpuzzels en de Rubik kubus. Zij ontdekten dat achter simpel ogende puzzeltjes heel interessante wiskunde verscholen zit. Ze hebben gekeken naar het wel of niet oplosbaar zijn van die puzzels. Daarbij bleek 'pariteit' een cruciaal begrip; met het opstellen van de juiste formules werd het allemaal logisch. Elk van de puzzels werd onderzocht en bewezen werd of die puzzel oplosbaar is of niet. Maar wanneer je dan weet dat die puzzel opgelost kan worden, heb je helaas dat oplossen van de puzzel nog niet direct voor elkaar.

De derde prijs is voor Noud Brasjen en Sjoerd Huininga van het Veurs Lyceum in Leidschendam, voor de ontwikkeling van Navioscan, een systeem om de bodem onder water in kaart te brengen. Zij hebben een grafiekprogramma geschreven dat het bodemprofiel driedimensionaal kan plotten en een ander programma dat de gegevens van de dieptemeting kan uitlezen en de motoren kan aansturen. Een GPS en een sonar werden aangesloten op een laptop met de programmatuur en de eerste meting kon gedaan worden. Zij hebben als test een gebied op de Vlietlanden van 300 bij 233 meter gescand, en toen… waren de accu's van de laptop leeg.

Presteren bij grootste scholierenwedstrijd

Voor profielwerkstukken is de Van Melsen Prijs (VMP) de grootste scholierenwedstrijd in het land. De deelnemers zijn leerlingen die een profielwerkstuk hebben gemaakt over een onderwerp uit de biologie, scheikunde, natuurkunde, wiskunde en informatica. Dit jaar zijn er 71 werkstukken ingezonden (een record), waaronder 14 werkstukken op het gebied van de wiskunde, ook niet eerder vertoond. De profielwerkstukken wiskunde lijken aan een opmars begonnen.
De kwaliteit is over de hele linie uitzonderlijk hoog. Leerlingen doen mee om te winnen, niet alleen voor de lol. Prof. Jan van Groenendael, voorzitter van de jury: 'Kennelijk is presteren weer een issue voor scholieren. Dit past bij de teneur "wij willen meer les". Dit volgt ook uit het feit dat twee winnende teams extra zijn gestimuleerd, de een met het volgen van een masterclass wiskunde aan de Radboud Universiteit in Nijmegen en de ander door in Utrecht deel te nemen aan het Junior College.'

Motivatie voor algebra

Tijdens de Van Melsen lezing met als titel *Rekentrucs, een motivatie voor algebra* werd

foto 1 Bruno vertelt bij de VMP over de puzzels.





foto 2 Sjoerd (links) en Noud zijn derde geworden bij de VMP.



foto 3 Brigitte (links) en Valentijn bij de presentatie in St. Petersburg.

foto 4 Petra, Jesse, Sjoerd, Bruno en Willem (vlnr) tijdens een rustig moment in Rusland.

de hele collegezaal aan het werk gezet door drs. Jan Los (Vrije Universiteit Amsterdam). Met pen en papier maar vooral ook met de vingers van beide handen werd er eerst eenvoudig vermenigvuldigd, beginnend met 12 keer 13 gevolgd door onder andere 106 keer 107 en 1012 keer 1014. Daarna werd ingegaan op de algebraïsche onderbouwing van deze vermenigvuldigingen en werd op bord de formule $(10^k + a)(10^k + b) = 10^{2k} + (a + b)10^k + ab$ afgeleid.
De heer Los heeft tijdens de lezing de toehoorders, net als zijn leerlingen in het voortgezet onderwijs, laten zien dat het gevolgde pad van concreet naar meer abstract leidt tot een motivatie voor algebra, met name voor het foutloos aanleren/ beheersen van algebraïsche vaardigheden. Via dit pad ontstaat tegelijkertijd ook respect voor de formules.

Alle prijswinnaars winnen ook internationaal

Voor de prijswinnaars hield het niet op met deelname aan de Van Melsen Prijs, want zij mochten hun onderzoek ook presenteren bij de International Conference for Young Scientists. Dit jaar werd de wedstrijd in Rusland, in St. Petersburg, gehouden. Van 21 tot 27 april hebben 110 leerlingen van middelbare scholen uit zo'n 15 landen hun onderzoek gepresenteerd.

Elk van de drie presentaties, door Jesse, Valentijn en Sjoerd, was duidelijk en de vragen van de deskundige jury werden goed beantwoord. Jesse kreeg zelfs als enige deelnemer de complimenten van de jury voor zijn vlotte presentatie. De Rubik kubus en een andere 3D puzzel, *Peter's black hole*, werden onder grote belangstelling van de andere deelnemers gedemonstreerd.

Alle prijswinnaars van de Van Melsen Prijs kregen ook internationaal een prijs. De derde prijswinnaars met de Navioscan werden ook in Rusland derde in de categorie toegepaste natuurkunde. De twee eerste prijswinnaars van Nijmegen deelden opnieuw de hoogste prijs. Dit keer wonnen zij de tweede prijs in de categorie wiskunde. Zij versloegen daarbij meerdere Russische deelnemers die traditioneel veel meer wiskundeonderwijs krijgen. Een heel knappe prestatie, nationaal en internationaal behoren deze jonge onderzoekers tot de top.

Over de auteur
Pieter van der Hoeven is als docent wiskunde en informatica werkzaam aan het Elzendaalcollege te Boxmeer. Hij is voor één dag in de week gedetacheerd aan de Radboud Universiteit Nijmegen. Daarnaast is hij lid van de opgavencommissie van de Kangoeroe.
E-mailadres: *pieter.van.der.hoeven@ elzendaalcollege.nl*



Parate kennis en algebra

[Anne van Streun]

$$\frac{x^2-y^2}{x-y}=2$$

WISKUNDEDIDACTIEK ANNO 2010

Aflevering 6: Canon van de algebra?!

De canon van de geschiedenis

Sinds kort kennen we bij geschiedenis de *canon* van Nederland [1], met het woord canon in de betekenis uit Van Dales woordenboek '*regel, richtsnoer, maatstaf*'. De canon van de geschiedenis is in de eerste plaats bedoeld voor het onderwijs: niet als verplichte stof, maar wel als een duidelijke handreiking van wat er op de basisschool en op de verschillende schooltypen van het voortgezet onderwijs behandeld zou kunnen worden. Met als ultieme doel dat alle leerlingen van het basisonderwijs en het voortgezet onderwijs over eenzelfde basis aan kennis van de geschiedenis gaan beschikken. De aanleiding tot deze volstrekt nieuwe benadering van het geschiedenisonderwijs was de zorg over het ontbreken van *parate kennis* van de geschiedenis, ingebed in een *zinvol* en *samenhangend netwerk* van historische verhalen en achtergrondkennis. Blikvanger is de kaart met vijftig 'vensters' (***zie figuur 1***), met daarachter telkens een verhalende inleiding die duidelijk maakt welke betekenis kan worden toegekend aan het desbetreffende onderdeel van de canon. Via de *Vertakkingen* klapt het canonvenster als het ware open, om zicht te bieden op uitbreidingsmogelijkheden voor het onderwijs. Dan gaat het om suggesties voor verwante onderwerpen, om mogelijke thema's en om verwijzingen.

Doorlopende leerlijnen voor rekenen/wiskunde

Ook ten aanzien van het reken- en wiskundeonderwijs wordt op tal van plaatsen zorg geformuleerd over het ontbreken van *parate kennis* van wiskundige vaardigheden, ingebed in een *zinvol* en *samenhangend netwerk* van wiskundige begrippen en toepassingen. Op het hoogste politieke niveau heeft dat geleid tot de brief van minister Van der Hoeven (12 februari 2007) aan de Tweede Kamer over doorlopende leerlijnen reken- en taalvaardigheid. Zij beargumenteert in die brief dat het geconstateerde te lage niveau van de pabo-instroom een symptoom is van de bredere problematiek van de instroom in het hoger onderwijs. Vervolgens betoogt ze dat de autonomie van de scholen duidelijke grenzen kent, namelijk daar waar het de kwaliteit betreft van de kennis van de uitstromende leerlingen. *'De autonomie van de één is immers de onvrijheid van de ander.'* Vervolgens licht ze haar besluit toe om een *Expertgroep* in het leven te roepen die nog dit jaar een concreet inhoudelijk advies moet uitbrengen over wat leerlingen in de verschillende stadia in hun onderwijsloopbaan van primair tot hoger onderwijs moeten kennen en kunnen. Ook moet de Expertgroep een oordeel geven over de bekwaamheidseisen waaraan leraren moeten voldoen en over vraag of die bekwaamheidseisen toereikend zijn vertaald in concrete onderwijsprogramma's voor de pabo en voor die tweedegraads lerarenopleidingen die basale reken-en taalvaardigheden vereisen. Inmiddels is die Expertgroep op 9 mei door de nieuwe staatssecretaris Marja van Bijsterveldt-Vliegenthart geïnstalleerd. De voorzitter is Heim Meijerink en voor het vakgebied rekenen/wiskunde zijn Jan van de Craats en ikzelf benoemd.

Een canon van de algebra

De doorlopende leerlijnen voor rekenen en wiskunde betreffen natuurlijk een veel uitgebreider terrein dan alleen de schoolalgebra, maar in het kader van deze artikelenserie beperk ik mij nu tot de algebra. In het SLO-project ReAL, een afkorting van Rekenen en Algebra Leerlijnen (zie *www.slo.nl*, de website van de SLO) wordt in samenwerking met het FI onder meer een analyse uitgevoerd van de aansluiting van het primair onderwijs naar het voortgezet onderwijs. Een voorlopige constatering is dat in het Nederlandse basisonderwijs amper aanzetten worden geleverd voor het ontdekken van patronen en verbanden waarin een rekenkundige relatie tussen variabelen aan de orde is. Het ontdekken van deze rekenkundige relaties en het verwoorden daarvan met behulp van de taal van de algebra is een basale vaardigheid, waarvan de leerlijn in het basisonderwijs behoort te beginnen. Elders in de wereld wordt dat aspect van de algebra beter beheerst [2]. Analoog aan de canon van de geschiedenis is dat een essentieel *venster* in de canon van de algebra. Conform de opdracht van de Expertgroep is het mogelijk om op een basisniveau (bijvoorbeeld de gehele leerlingenpopulatie na drie jaar voortgezet onderwijs) de vereiste kennis en vaardigheid in een 90%-criterium te formuleren en aansluitend op één of meer differentiële niveaus (bijvoorbeeld havo 3 basis, havo 3 N).

Een voorbeeld voor verbanden

In het rapport 'Algebra om te begrijpen' (NVvW) staan de bekende overgangen tussen de verschillende representaties van verbanden en functies in een schema weergegeven (***zie figuur 2 op pag. 323***). Een canon van de algebra kan heel goed worden gefundeerd op dit prachtige schema, waarvan de oorspronkelijke auteur (lid van de genoemde NVvW-werkgroep) mij niet bekend is. Neem bijvoorbeeld het mogelijke venster *rekenkundige relaties tussen variabelen in algebrataal verwoorden*. Dan gaat het bijvoorbeeld om een rij getallen (dus het blokje *Numeriek*), waar een formule of iets dergelijks (het blokje *Algebraïsch)* bij moet worden gemaakt. Op het basisniveau na drie jaar voortgezet onderwijs kun je eisen dat op die manier lineaire formules kunnen worden gemaakt (90%-criterium) en op een hoger niveau van leerjaar 3 kun je daar exponentiële formules aan toevoegen. Je kunt ook eisen dat uit een verbale beschrijving van een situatie leerlingen zelf een tabel of patroon kunnen maken en daar vervolgens dat patroon in algebrataal gaan beschrijven. Natuurlijk kun je ook aan

de leerstofkant beginnen, bijvoorbeeld bij tweedegraads verbanden of functies, gegeven in de vorm van een formule of functievoorschrift (blokje *Algebraïsch*). Een mogelijk basisniveau in leerjaar 3 zou de overgangen naar grafiek (*Grafisch*) en tabel (*Numeriek*) kunnen bevatten, terwijl op een hoger niveau de bekende algebraïsche herleidingen van een tweedegraads formule of vergelijking (van *Algebraïsch* naar *Algebraïsch*) kunnen worden geëist (steeds met het 90%-criterium). Uit de voorgaande afleveringen van deze serie zijn voldoende voorbeelden te halen voor een verdere uitwerking van een mogelijke canon van de algebra.

figuur 1



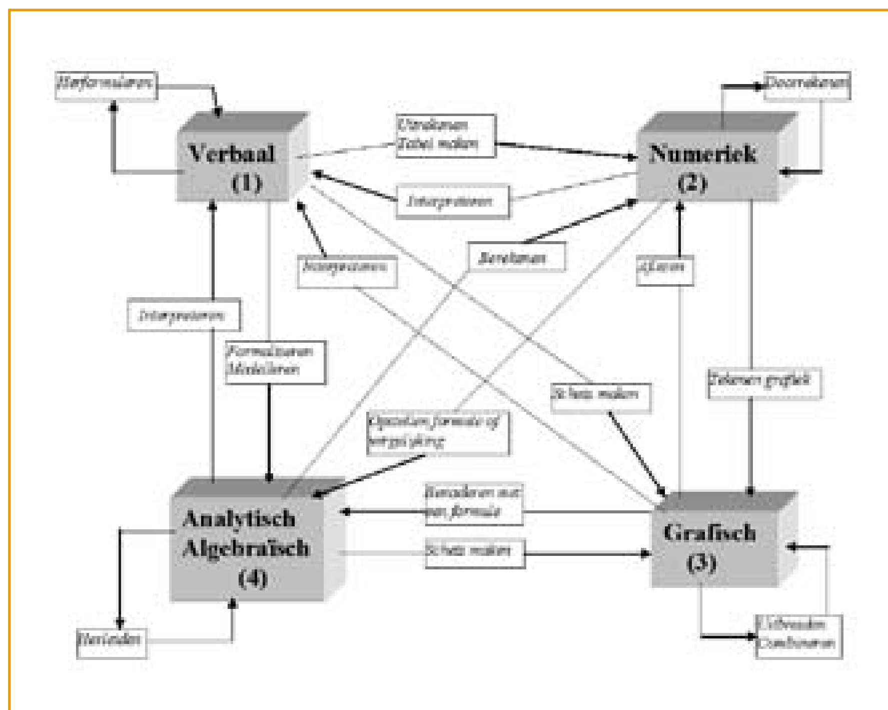
Het 90%-criterium, noodzakelijk maar niet voldoende

Deze serie artikelen heeft als focus de *parate kennis* van aspecten van de algebra, dus de kennis die actueel, snel en routinematig wordt beheerst. Eerder is al betoogd dat die kennis het denkgereedschap (het repertoire) is waarmee meer complexe problemen en situaties kunnen worden aangepakt. Die kennis en vaardigheden kunnen helder worden beschreven. De aandacht van leerlingen en leraren op het belang van die parate kennis kan door middel van toetsen met korte antwoordopgaven worden onderstreept, waarbij het essentieel is dat volledige beheersing wordt nagestreefd, het zogenaamde 90%-criterium. Niet 6 van de 10 opgaven goed, maar alle tien, met een kleine marge voor een foutje.

Wellicht is het niet overbodig om op te merken dat deze parate kennis noodzakelijk is maar niet voldoende voor het met succes kunnen gebruiken van wiskunde in het oplossen van wiskundige en toegepaste problemen of zelfs voor het goed scoren op de gewone proefwerk-opgaven of examenopgaven. Een goede probleemaanpak begint natuurlijk met een probleemverkenning, waarin de oplosser probeert zich een adequate mentale voorstelling van de situatie te vormen en naar aanknopingspunten zoekt om al eerder verworven kennis te kunnen gebruiken. Dat laatste vraagt om een *overzicht* van het gehele repertoire aan parate kennis met de kenmerken die de wiskundige kennis koppelt aan situaties. Dat overzicht breidt zich, als het goed is, in de loop van de jaren steeds meer uit en wordt onderhouden en getoetst (90%-criterium) met korte antwoordopgaven die het gehele gewenste kennisbestand bestrijken. (Zo'n 50 jaar geleden maakten Bos & Lepoeter al veel werk van gemengde problemen, achterin het leerboek.)

Consensus gewenst

Zoals wel vaker in de geschiedenis van ons wiskundeonderwijs zijn we verwikkeld in een heftig veranderingsproces, waarin deze keer zelfs de waarde van het vakonderwijs stevig ter discussie staat. Wie de ontwikkelingen volgt in het hoger onderwijs (hbo en in het bijzonder de tweedegraads lerarenopleidingen), in het mbo en alle mogelijke invullingen van trendy termen als 'Het Nieuwe Leren' en 'Competentiegericht Leren' zal dat niet zijn ontgaan. In het voortgezet onderwijs zien we een aandrang tot meer samenhang tussen de vakken (op zich heel begrijpelijk), waarbij het vak wiskunde soms buiten spel staat of haar specifieke identiteit dreigt te verliezen. Binnen de wiskundewereld bestaat hier en daar de neiging om elkaar van alles te verwijten met voorbijgaan aan de complexiteit van de werkelijkheid in de scholen waar wij, wiskundeleraren, ons dagelijks werk moeten doen. Het is zaak om in de verschillende organen, projecten en commissies te streven naar een consensus in de formulering van haalbare doelen van ons reken- en wiskundeonderwijs, zoals dat op voortreffelijke wijze is gerealiseerd in de canon van de geschiedenis. Van belang is daarbij dat wiskundeleraren zelf reageren en



figuur 2

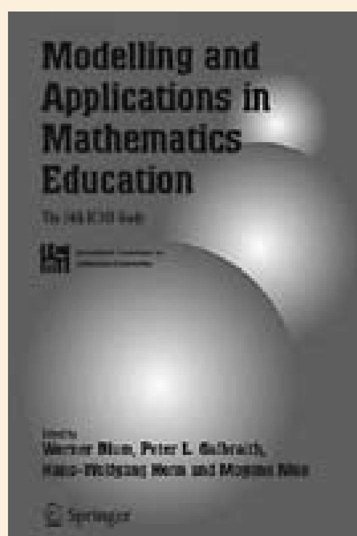
hun inzichten en reacties, bijvoorbeeld op deze serie artikelen, opsturen naar cTWO, ter attentie van de Programmacommissie Onderbouw.
Op weg naar een *Canon van de wiskunde* voor 12- tot 18-jarigen!

Noten

[1] Voor meer informatie over de canon van Nederland zie de website: http://entoen.nu/

[2] Zie *Algebra-prestaties van tweedeklassers* door Pauline Vos in *Euclides 82-4*, februari 2007.

Over de auteur
Anne van Streun is wiskundeleraar sinds 1964, wiskundedidacticus aan de Rijksuniversiteit Groningen sinds 1974, en hoogleraar didactiek bètawetenschappen sinds 2000.
E-mailadres: *avstreun@euronet.nl*



Verschenen /

[Wim Kleijne]

Onlangs is bij Springer als neerslag van de 14e ICMI Study een nieuw deel verschenen in de New ICMI Study Series (NISS):

Auteurs: Werner Blum, Peter L. Galbraith, Hans-Wolfgang Henn, Mogens Niss (eds.)
Titel: Modelling and Applications in Mathematics Education / The 14th ICMI Study.
Uitgever: Springer, 2007 (NISS 10)
ISBN: 978-0-387-29820-7
Prijs: € 114,95 (gebonden, 524 pagina's, met DVD)

Informatie over het boek kan gevonden worden op de website van NISS, binnen de website van Springer: *www.springeronline.com/series/635* (klik op *Titles in this series*).

Ik wijs er op dat op de prijs van het boek, indien voor persoonlijk gebruik, kortingen verkregen kunnen worden van 60% op de gebonden uitgave en van 25% op de paperback-uitgave. Daarvoor moet de zogenoemde 'SpringerToken' gebruikt worden bij de bestelling (zie de Springer website).
De SpringerToken voor de gebonden uitgave luidt: zqwqqJQFWzQ8WqY.
De SpringerToken voor de paperback uitgave luidt: hAjkrckgWFaEYQA.

Over de auteur
Drs. Wim Kleijne is onder meer National Representative voor ICMI (International Commission on Mathematical Instruction).



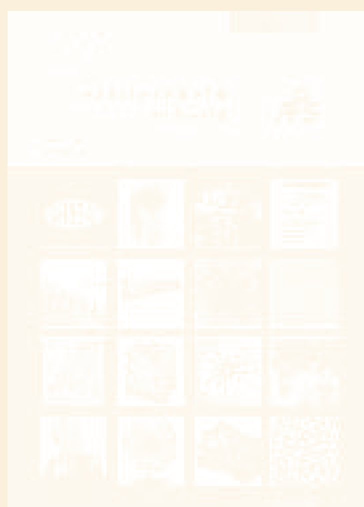
Auteurs: Jan Blankespoor, Kees de Joode, Aad Sluijter
Uitgever: Hbuitgevers, Baarn (2007)
ISBN 978 90 5574 496 1
Prijs € 47,50 (411 pag.)

VERSCHENEN /

TOEGEPASTE WISKUNDE VOOR HET HOGER BEROEPSONDERWIJS, DEEL 1

Uit de flaptekst:
De herziene serie Toegepaste Wiskunde voor het Hoger Beroepsonderwijs is geschikt voor alle opleidingen waar wiskundige vaardigheden een belangrijke plaats innemen en met name voor de sector Techniek. (...)
Deel 1 behandelt de gehele propedeusewiskunde. (...)
Er is veel gedaan om het inzicht en de routine in wiskundige concepten te vergroten, maar ook de wiskundige contexten krijgen voldoende aandacht. Uitvoerige, formele bewijzen komen in de boeken nauwelijks voor.

Elk hoofdstuk bevat een aantal Maple-voorbeelden en -vraagstukken, die uiteraard ook met een ander computeralgebrasysteem (of met een grafische rekenmachine) te maken zijn. De auteurs zijn van mening dat computeralgebra weliswaar onmisbaar is, maar dat de student zich eerst de achterliggende wiskundige concepten zal moeten eigen maken. (...) Op de website *www.hbuitgevers.nl* vindt de student de uitwerkingen van de vraagstukken van de herhalingsparagrafen.

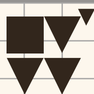


Auteurs: Kees Hoogland, Marja Meeder
Uitgever: APS, Utrecht (2007)
ISBN 90-6607-381-0
Prijs: € 9,90 (66 pag.)

VERSCHENEN /

GECIJFERDHEID IN BEELD

Uit de flaptekst:
Iedereen komt regelmatig in situaties waarin een beslissing genomen moet worden waarbij kwantitatieve gegevens belangrijk zijn. Dit boekje laat zien hoe gevarieerd die situaties zijn.
Gecijferdheid is het vermogen van een individu om zich zelfstandig en adequaat te redden in situaties waarin getallen, patronen en structuren een rol spelen.
Dit boekje helpt de lezer op weg om zich een beeld te vormen van gecijferdheid.
Voor meer informatie: *www.gecijferdheid.nl*



Jaarvergadering / Studiedag 2007

[Marianne Lambriex]

Eerste uitnodiging
Dit is de eerste uitnodiging voor de jaarvergadering/studiedag 2007 van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, op **zaterdag 10 november 2007**.
Aanvang: 10:00 uur
Sluiting: 16:00 uur
Plaats: Anna van Rijn College, locatie *Albatros*, Albatros 1, 3435 XA Nieuwegein

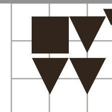
Agenda
Huishoudelijk gedeelte:
- Opening door de voorzitter mevr. drs. M. Kollenveld
- Jaarrede door de voorzitter
- Notulen van de jaarvergadering 2006 (zie een volgend nummer van Euclides)
- Jaarverslagen (zie een volgend nummer van Euclides)
- Decharge van de penningmeester, vaststelling van de contributie en benoeming van een nieuwe kascommissie
- Uitbreiding statuten
- Bestuursverkiezing en bestuursoverdracht
- Rondvraag
- Sluiting jaarvergadering

Themagedeelte van de studiedag: Relevante wiskunde
Natuurlijk weten we allemaal dat wiskunde relevant is, maar de meningen kunnen nog wel eens uiteenlopen over *welke wiskunde voor wie*. Vanuit allerlei invalshoeken wordt daarover gesproken, ook in de politiek en de media. Deze discussie willen we op onze studiedag ook graag voeren. We willen antwoorden zoeken op vragen zoals:
- Welke wiskunde is voor de vervolgopleidingen nodig?
- Welke wiskunde gebruikt een econoom of arts?
- Welke wiskundige vaardigheden hebben bestuurders en beleidsmakers nodig?

We willen daarom ook mensen 'uit de praktijk' uitnodigen om daarover te vertellen. Wie denkt dat hij/zij aan dit thema kan bijdragen met een workshop of wie een praktijkmens wil voordragen die daarover interessante informatie kan verstrekken, verzoeken we vóór 25 juni contact op te nemen met Wim Kuipers (*w.kuipers@nvvw.nl*) of Henk van der Kooij (*h.v.d.kooij@nvvw.nl*).
Daarnaast zal er natuurlijk ook aandacht zijn voor actuele zaken zoals de examenprogramma's vanaf 2007 en de verdere toekomst vanaf 2010.

Er is voor een ieder wel iets interessants te vinden. Hoe een en ander vormgegeven wordt, en meer details over wat u die dag kunt verwachten, dat laten we u in het septembernummer van Euclides weten.

Dus reserveer in uw agenda: zaterdag 10 november NVvW-dag
Voor meer informatie kunt u zich wenden tot Marianne Lambriex (e-mailadres: *m.lambriex@nvvw.nl*).



Van de bestuurstafel

[Swier Garst]

Op het moment van schrijven van deze bestuurstafel staan de examens voor de deur en loopt het schooljaar alweer op een eind. Drukke tijden waarvan we het werk moeilijk naar de vakantie kunnen verschuiven. Maar goed, ter zake, laten we de lopende zaken van de vereniging de revue laten passeren.

Aansluiting bij Federatie Onderwijsbonden CMHF/MHP

Nadat de NVvW als lid van de Federatie Onderwijsbonden is geaccepteerd, blijven er nog wat zaken over die geregeld moeten worden. Zo moet uit onze statuten duidelijk worden, dat de NVvW ook mogelijkheden biedt leden (indirect) rechtspositionele hulp te verlenen. Dat betekent dat we de statuten moeten uitbreiden. Pim van Bemmel en Henk Rozenhart zijn druk bezig deze uitbreiding goed te laten verlopen. Natuurlijk zal het bestuur de uitbreiding voorleggen aan de leden. De concepttekst van de uitbreiding van de statuten is als 'insteker' bij deze aflevering van Euclides gevoegd. Een en ander moet op de jaarvergadering zijn beslag krijgen.
Tenslotte zal Pim van Bemmel namens de NVvW de vergaderingen van de Federatie bijwonen en het bestuur op de hoogte houden van de ontwikkelingen daar.

Advertentiebeheer Euclides

De laatste jaren is erg veel werk verzet en geld verdiend door de voorzitter van de redactie van Euclides, Gert de Kleuver. Hij zorgde steeds voor het binnenhalen van de advertenties in ons blad. Ook op deze plaats mag de dank voor al dit werk niet ontbreken. Kortom, Gert, bedankt voor al dit werk. Intussen zijn we in gesprek met onze drukker/vormgever, fa. De Kleuver, over de mogelijkheden het advertentiebeheer onder te brengen bij de drukker/vormgever. Wellicht kunnen we na de vakantie meer melden over de regeling met fa. De Kleuver.

Studiedag/jaarvergadering

Enkele bestuursleden werken hard om de studiedag weer als vanouds te laten verlopen. Marianne Lambriex heeft dezelfde school als vorige jaardag vastgelegd, Wim Kuipers en Henk van der Kooij zijn bezig met de inhoudelijke vulling. En zoals al gezegd, Henk Rozenhart werkt aan de uitbreiding van de statuten.

Wiskunde D

Intussen heeft de SLO de (concept)handreiking wiskunde D klaar. Dat betekent dat nu voor alle wiskundevakken die in 2007 starten, handreikingen beschikbaar zijn. Wellicht heeft u er al enkele via uw school ontvangen.
Verder is bekend geworden dat op woensdag 13 juni de *Dé dag* zal worden gehouden. De bedoeling is om dan de start van wiskunde D te laten plaatsvinden. Meer informatie zal te vinden zijn op de sites *www.fi.uu.nl/ctwo/WiskundeD/* en *www.nvvw.nl*.

Website

Wat betreft de verenigingssite, ook daaraan wordt achter de schermen hard gewerkt. Metha Kamminga en de webmasters Lennart de Jonge en Dick Klingens melden iedere bestuursvergadering nieuwe stappen op het gebied van de ontwikkeling van de site.

Volgend schooljaar 1

Eigenlijk een spannend jaar. Wiskunde D gaat beginnen en op dit moment lijkt het erop dat veel scholen wiskunde D willen aanbieden. Uit de experimenten blijkt dat er gelukkig nog erg veel enthousiaste collega's zijn die de mogelijkheden voor wiskunde D zien. Nu nog hopen dat een groot aantal leerlingen wiskunde D gaat kiezen.

Volgend schooljaar 2

Ter voorbereiding op de nieuwe examenprogramma's 2010 en later zullen op verschillende scholen kleine experimenten worden uitgevoerd om na te gaan in welke mate verschillende examenonderdelen haalbaar zijn. Natuurlijk proberen we zoveel mogelijk iedereen over de ontwikkelingen op de hoogte te houden.

Tenslotte

Alle collega's veel sterkte met de laatste weken van het schooljaar en het vele werk dat die met zich meebrengen. Verder veel dank aan al die collega's binnen de vereniging die steeds weer veel werk verzetten, meedenken of op een andere manier steeds maar weer actief zijn om het wiskundeonderwijs, nogal eens tegen de wind in, optimaal te laten verlopen. En volgend schooljaar vrolijk verder, te beginnen met de vakantiecursussen in Amsterdam en Eindhoven.

PUZZEL 828

De truc van Floyd

[Frits Göbel]

Een bekende puzzel gaat als volgt. Start met een getal k en laat $f(k)$ de som van de kwadraten van de cijfers (tientallig geschreven) zijn. Voorbeeld: $f(1) = 1$, $f(1933) = 1^2 + 9^2 + 3^2 + 3^2 = 100$. Pas nu op het getal $f(k)$ dezelfde operatie toe, en herhaal dit. In ***figuur 1*** ziet u hoe dit afloopt voor de startwaarden 3 en 5. De bedoeling is om te onderzoeken hoe de rij van de geïtereerden zich gedraagt, in het bijzonder: welke cykels optreden voor diverse startwaarden.

Er bestaan talloze variaties op deze puzzel. In plaats van kwadraten kun je derde, of nog hogere, machten nemen. Een andere mogelijkheid is het gebruik van een ander talstelsel. Nob Yoshigahara bekeek de kwadraten 100-tallig! 1933 gaat dan over in $19^2 + 33^2 = 361 + 1089 = 1450$. H.J. te Riele heeft een mooi overzichtsartikel over dergelijke afbeeldingen geschreven; zie *Nieuw Archief voor Wiskunde (4)*, Volume 1 (1983), pp. 345-360.

Voor gebruikelijke functies lopen de geïtereerde waarden niet naar oneindig, maar naar een vast punt, of ze vormen een cykel. Maar hoe ver moet je gaan om alle cykels te vinden? Voor een gegeven functie is het gewoonlijk niet moeilijk om een getal M te vinden zodanig dat geldt:

a. als $n \geq M$, dan is $f(n) < n$,
b. als $n < M$, dan is $f(n) < M$.

Heb je eenmaal zo'n M, dan kun je die stapsgewijs verscherpen. In ons eerste voorbeeld kun je zo snel tot 200 komen. Dat betekent dus voor die functie dat alle cykels uitsluitend getallen kleiner dan 200 bevatten.

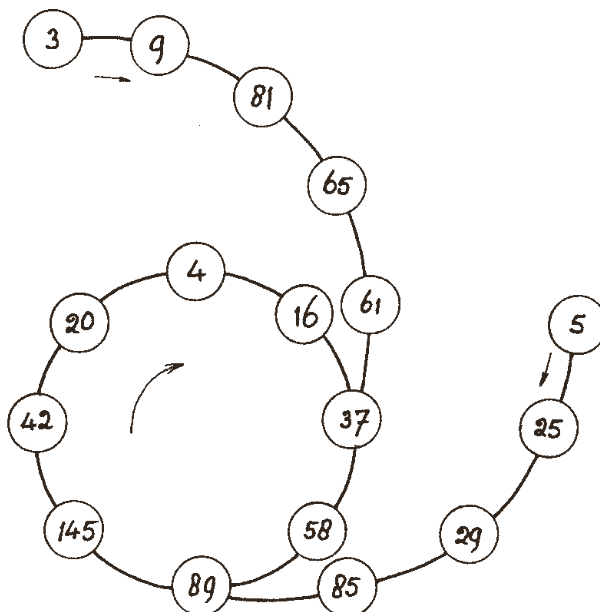
Een complicatie wordt gevormd door de 'aanloopstukken' van een cykel. In ***figuur 1*** ziet u wat hier wordt bedoeld. Als je met 3 of 5 begint, kom je daar nooit meer terug. Weliswaar kun je een cykel herkennen door alle gegenereerde waarden op te slaan, maar als de aanloopstukken en de cykellengten erg groot worden, is er een probleem. Gelukkig is er een elegante methode, afkomstig van Floyd, die zelfs voor programmeerbare rekenapparaatjes geschikt is. Hierbij worden, uitgaande van een startwaarde a, voor $n = 1, 2, 3, \ldots$ de waarden $f^n(a)$ en $f^{2n}(a)$ bepaald. Zodra deze twee geïtereerden aan elkaar gelijk zijn, behoren ze tot een cykel! De lengte daarvan is dan een deler van n. De waarde van $f^n(a)$ kan nu als startwaarde worden gebruikt om de cykel te bepalen. Het vereiste aantal geheugenplaatsen is dus onafhankelijk van de grootte van de aanloopstukken.

Na deze lange inleiding slechts één opgave, maar wel een opgave die u, al of niet voorzien van een programmeerbaar rekendoosje, hopelijk enige tijd aangenaam bezig zal houden.

Opgave

Bepaal alle cykels als f de som van de machten van 2 van de cijfers is. Een voorbeeld: $f(305) = 2^3 + 2^0 + 2^5 = 8 + 1 + 32 = 41$.

Oplossingen kunt u mailen naar *a.gobel@wxs.nl* of per gewone post sturen naar F. Göbel, Schubertlaan 28, 7522 JS Enschede. Er zijn weer maximaal 20 punten te verdienen met uw oplossing. Wie dan bovenaan de ladder staat, ontvangt een boekenbon van 30 euro. De deadline is 1 september 2007. Veel plezier!



figuur 1

Oplossing 826

Heron en Descartes

Er waren 14 inzendingen. De volgende zes mensen hadden de vier opgaven helemaal of bijna helemaal goed: Hans Klein (weer heel snel), Cees Otto (welkom!), Lieke de Rooij, Ton Kool, Gerhard Riphagen en Herm Jan Brascamp.

Opgave 1
Na 13, 14, 15 (met oppervlakte 84 en niet 21) is 51, 52, 53 het volgende drietal opvolgende getallen waarvoor de formule van Heron een geheel getal oplevert.
De opgave is heel goed proberenderwijs op te lossen, met of zonder computer. De middelste waarden (4, 14, 52, 194, …) van mogelijke drietallen voldoen aan de recursie $b_{n+1} = 4b_n - b_{n-1}$
Wobien Doyer loste de opgave op met 'the method of descent', zoals die in het Engels heet.

Opgave 2
Het resultaat is $\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}$.
Dit fraaie antwoord is zonder al te veel rekenwerk te vinden met de stelling van Pythagoras en bovengenoemd resultaat van Heron.

Opgave 3
Het resultaat is $a^2 + ab + b^2$.
Velen lieten de wortelvorm staan, maar dat levert niet een uitkomst waaraan je kunt zien dat er een geheel getal uitkomt. Dat was namelijk wél de bedoeling, wat ik trachtte te suggereren met de inleidende tekst.

Opgave 4
De waarden van n waarvoor $n = xy + xz + yz$ geen oplossing < 500 heeft zijn: 1, 2, 4, 6, 10, 18, 22, 30, 42, 58, 70, 78, 102, 130, 190, 210, 330 en 462.
Sommigen losten deze opgave op met de hand, maar vonden het toch beter om het antwoord even met de computer te controleren.
Omdat $n + x^2 = (x + y)(x + z)$, is er wél een oplossing als $n + x^2$ te ontbinden is in factoren groter dan x. Dit schakelt snel een flink aantal getallen uit als je $x = 1, 2, \ldots$ invult.

Rond 1995 had ik bedacht dat de unitaire symmetrische functies van de graad 2 een aardige variatie op de welbekende partities zouden zijn. Ik noemde ze 'fragmentaties'. (Die bommen waren me toen nog niet bekend.) Bovenstaande rij bestaat dus uit (de) getallen waarvoor het aantal drietermige fragmentaties gelijk is aan 0. Ze blijken heel andere eigenschappen dan de partities te hebben.
Drie oplossers wezen er op dat ook in 'The On-line Encyclopedia of Integer Sequences' (*www.research.att.com/~njas/sequences/*) bovengenoemde rij voorkomt, dat er tussen 500 en 10^{11} geen verdere n-waarden zijn, en daarna misschien nog één!

Ladderstand
De top van de ladder ziet er nu als volgt uit:

W. van den Camp 416
H.J. Brascamp 412
J. Meerhof 395
L. de Rooij 274
G. Riphagen 232
L.H. van den Raadt 167
H. Klein 153
N. Wensink 135
W. Doyer 116

De zomerprijzen zijn deze keer toegekend aan Lieke de Rooij en Herm Jan Brascamp, die een boekenbon ter waarde van 20 respectievelijk 15 euro ontvangen. Gefeliciteerd!

SERVICEPAGINA

Voor overige internet-adressen zie
www.wiskundepersdienst.nl/agenda.php

Voor Wiskundeonderwijs Webwijzer zie
www.wiskundeonderwijs.nl

Publicaties van de Nederlande Vereniging van Wiskundeleraren



Zebraboekjes

1. Kattenaids en Statistiek
2. Perspectief, hoe moet je dat zien?
3. Schatten, hoe doe je dat?
4. De Gulden Snede
5. Poisson, de Pruisen en de Lotto
6. Pi
7. De laatste stelling van Fermat
8. Verkiezingen, een web van paradoxen
9. De Veelzijdigheid van Bollen
10. Fractals
11. Schuiven met auto's, munten en bollen
12. Spelen met gehelen
13. Wiskunde in de Islam
14. Grafen in de praktijk
15. De juiste toon
16. Chaos en orde
17. Christiaan Huygens
18. Zeepvliezen
19. Nullen en Enen
20. Babylonische Wiskunde
21. Geschiedenis van de niet-Euclidische meetkunde
22. Spelen en Delen
23. Experimenteren met kansen
24. Gravitatie
25. Blik op Oneindig

Zie verder ook *www.nvvw.nl/zebrareeks.html*
en/of *www.epsilon-uitgaven.nl*

Nomenclatuurrapport Tweede fase havo/vwo
Dit rapport en oude nummers van Euclides (voor zover voorradig) kunnen besteld worden bij de ledenadministratie (zie Colofon).

Wisforta – wiskunde, formules en tabellen
Formule- en tabellenboekje met formulekaarten havo en vwo, de tabellen van de binomiale en de normale verdeling, en toevalsgetallen.

Honderd jaar wiskundeonderwijs, lustrumboek van de NVvW
Het boek is met een bestelformulier te bestellen op de website van de NVvW:
www.nvvw.nl/lustrumboek2.html
Voor overige NVvW-publicaties zie de website:
www.nvvw.nl/Publicaties2.html

Kalender

In de kalender kunnen alle voor wiskundedocenten toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen. Relevante data graag zo vroeg mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur, het liefst via e-mail (*redactie-euclides@nvvw.nl*).
Hieronder vindt u de verschijningsdata van Euclides in de lopende jaargang. Achter de verschijningsdatum is de deadline vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de *eind*versies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor echter ook *www.nvvw.nl/euclricht.html.*

Voorlopige data 83e jaargang

nr.	verschijnt	deadline
1	20 september	24 juli
2	1 november	18 september
3	20 december	6 november
4	7 februari	11 december
5	6 maart	22 januari
6	17 april	4 maart
7	29 mei	8 april
8	30 juni	15 mei

vr. 24 en za. 25 augustus, Eindhoven (TU/e)
vr. 31 augustus en za. 1 september, Amsterdam (CWI)
Vakantiecursus 2007: Wiskunde in beweging
Organisatie CWI

vrijdag 14 september, Eindhoven (TU/e)
2e ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade 2007
Organisatie Stichting NWO

vrijdag 21 september, Nijmegen
Wiskundetoernooi
Organisatie FNWI, Radboud Universiteit Nijmegen

wo. 17 t/m wo. 24 oktober, diverse locaties
WetenWeek 2007
Organisatie NCWT

zaterdag 10 november, Nieuwegein
Jaarvergadering/Studiedag 2007
Organisatie NVvW
Zie pag. 325 in dit nummer.

vrijdag 23 november, op de scholen
Wiskunde A-lympiade en Wiskunde B-dag
Organisatie FIsme

2008

vrijdag 25 januari, op de scholen
1e ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade 2008
Organisatie Stichting NWO

wo. 23 t/m vr. 25 januari, Noordwijkerhout
26e Panama conferentie
Organisatie FIsme

vr. 1 en za. 2 februari, Noordwijkerhout
14e Nationale Wiskunde Dagen
Organisatie FIsme

do. 13 en vr. 14 maart, Garderen
Finale Wiskunde A-lympiade
Organisatie FIsme

vrijdag 11 april, op de scholen
Wiskunde Kangoeroe
Organisatie Stichting Wiskunde Kangoeroe



gezocht

Wiskundedocenten met passie, die willen werken aan het onderwijs van morgen!

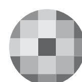
U bent een wiskundedocent met een passie. Een passie voor wiskunde, een passie voor leerlingen, een passie voor goed lesmateriaal en een passie voor onderwijs.

U bent kortom een bevlogen docent die vorm wil geven aan de uitdaging van morgen. U bent een docent die een bijdrage wil leveren aan de kwaliteit van het onderwijs en de toekomst van talloze jongeren. U wilt dit samen met andere docenten wiskunde met passie doen. U houdt van het klaslokaal — maar soms is het u te klein. U zoekt een breder platform voor uw passie.

Grijp uw kans!
Wolters-Noordhoff biedt u de mogelijkheid mee te schrijven aan de nieuwe edities van de methoden *Moderne wiskunde* en *Netwerk*. Om lid te worden van een auteursteam waarin inspiratie, collegialiteit en constructieve kritiek de toon zetten. Waarin vallen mag en opstaan beloond wordt met een aantrekkelijke royalty.

Geïnteresseerd?
Stuur uw cv met een beknopte motivatie naar Wolters-Noordhoff, t.a.v. Dieuwke Rosema, Postbus 58, 9700 MB Groningen of d.rosema@wolters.nl. Voor meer informatie kunt u bellen met Kees Karremans en Rypke Procee: telefoon (050) 522 63 18/522 62 31.

Samen werken aan het onderwijs van morgen



™ Wolters-Noordhoff